ՇԻՐԱԿԻ Մ. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
ШИРАКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. НАЛБАНДЯНА
M. NALBANDYAN STATE UNIVERSITY OF SHIRAK
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ SCIENTIFIC PROCEEDINGS

Պրակ Բ
Выпуск Б
Issue B

2023

№ 1

УДК 372.851, 372.853
DOI 10.54151/27382559-23.1pb-169

МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ ФОРМУЛЫ ЦЕНТРА МАСС

Никогосян Г. С., Манукян В. Ф., Серобян Е. С.

С точки зрения дидактики использование межпредметных связей в некоторой степени поднимает научный уровень преподавания, способствует легкому усвоению предоставленного материала. Не секрет, что математика играет в этой связи «диктатную» роль, способствуя обоснованию различных физических явлений и закономерностей. Несмотря на это «диктующее» обстоятельство, междисциплинарная связь математики и физики имеет двойственную природу. С одной стороны, математические знания используются для изучения физических проблем и вопросов, с другой стороны, существует обратная связь, когда физические закономерности заполняют область применения математических знаний, делают преподавание математического «абстрактного» материала более объективным и интересным.

Статья посвящена выявлению некоторых возможных полезных применений физических «инструментов» в процессе преподавания математического материала. В частности, на основе векторной формулы $\vec{r}_C = \sum_i m_i \vec{r}_i \Big/ m$ для определения радиус-вектора центра масс, хорошо известной из школьной программы физики, в работе предлагается новаторский-физический подход при решении задач покрытия областей, встречающихся в комбинаторике, в чем и заключается научно-педагогическая новизна работы.

Рассматривая такие задачи, в статье мы сначала вкратце изложим их традиционно-математические решения, после чего предложим новаторские-физические решения с применением формулы определения центра масс тела, тем самым выявляя еще одно проявление обратной межпредметной связи между физикой и математикой.

Ключевые слова: вектор, центр масс, математика, физика, межпредметные связи, задачи покрытия областей.

Введение. Один из способов повышения эффективности обучения, а также качества образования, это выявление и прямое применение межпредметных связей в учебном процессе, потому что благодаря именно этим связям школьный курс становится совершенным, а обучение становится более целевым и эффективным. Междисциплинарные связи являются прямым, конкретным отражением интеграционных процессов, происходящих в современном мире в науке и обществе. Эти связи играют важную роль в процессе приобретения учащимися практических, теоретических знаний. Поиск межпредметных связей помогает сделать знания, полученные учащимися, более значимыми и практичными. Эти связи играют важную роль в развитии системного мышления учащихся. Они позволяют передавать навыки, полученные в результате преподавания одного предмета, в область других предметов.

Межпредметные связи выступают в качестве ключа к обобщению знаний, активизации познавательной деятельности и формированию теоретического мышления обучающихся. Они также способствуют развитию их творческих способностей и оказывают положительное влияние на качество знаний обучающихся [1-2].

Содержание школьного образования качественно выходит на более высокий уровень при опоре на комплексное использование межпредметных связей в процессе обучения.

С точки зрения дидактики, использование межпредметных связей в некоторой степени поднимает научный уровень преподавания, способствует легкому усвоению предоставленного материала. Объясняя роль междисциплинарных связей в учебном процессе, Ян Амос Коменский в своей книге «Великая дидактика» очень точно утверждает, что «ручейки должны сливаться друг с другом и течь в реку» [3], имея в виду, что разные предметно-научные представления об одной и той же проблеме - «ручейки» - должны дополнять друг друга, перемешиваясь, стекая в «реку» знаний. В этом контексте, оценивая важность и полезность выявления межпредметных связей в процессе обучения в целом, в данной работе мы будем ссылаться на выявление некоторых проявлений межпредметных связей в математике и физике.

Не секрет, что математика играет в этой связи «диктатную» роль, способствуя обоснованию различных физических явлений и закономерностей. Несмотря на это «диктующее» обстоятельство, междисциплинарная связь математики и физики имеет двойственную природу. С одной стороны, математические знания используются для изучения физических проблем и вопросов, с другой стороны, существует обратная связь, когда физические закономерности заполняют область применения математических знаний, делают преподавание математического «абстрактного» материала более объективным и интересным [4].

Ниже мы поговорим о возможных применениях этой обратной связи, демонстрируя возможные полезные применения физических «инструментов» в процессе преподавания математического материала. В частности, на примере конкретных разноуровневых задач будем выявлять возможные новаторские применения формулы определения центра масс тела при решении задач покрытия областей, встречающихся в комбинаторике. Обычно задачи такого рода решают путем раскраски области [5-7]. Рассматривая такие задачи, ниже мы сначала вкратце изложим их традиционно-математические решения, после чего предложим новаторские-физические решения с применением формулы определения центра масс тела, тем самым выявляя обратную межпредметную связь физики и математики.

Сначала напомним всем известные из школьного курса физики условия равновесия тел и понятие «центр тяжести», после чего рассмотрим несколько разноуровневых задач из комбинаторной математики.

Понятия механики не только служат ценным эвристическим средством, облеченные в строгую математическую форму, они также позволяют получать математически безупречные решения задач геометрии и алгебры. В частности, чисто математическое определение понятия центра масс позволяет по-новому изложить решения многих геометрических задач [8-9]. При исследовании поведения систем частиц часто удобно использовать такую точку, которая характеризует положение и движение рассматриваемой системы как единого целого. Такой точкой служит центр масс системы. Радиус-вектор центра масс системы задается следующей формулой:

$$\vec{r}_C = \sum_i m_i \vec{r}_i \Big/ m, \qquad (1)$$

где m_i-масса i-го тела, $\vec{r}_i$-радиус-вектор, определяющий положение этого тела в пространстве, m - масса системы [9]. Проецируя обе части векторного равенства (1) на декартовые оси координат, получаем аналитические формулы для координат центра масс механической системы. В частности, в двухмерном пространстве для координат центра масс получим:

$$x_C = \sum_i m_i x_i \Big/ m; \quad y_C = \sum_i m_i y_i \Big/ m, \tag{2}$$

где x_i и y_i координаты массы m_i, соответственно на осях X и Y.

В дальнейшем, помимо уравнений (2), будем использовать еще и тот известный факт, что для однородных тел, обладающих симметрией, центр масс совпадает с геометрическим центром тела.

Теперь рассмотрим три разноуровневых задачи из комбинаторной математики, при решении которых непосредственно применим формулы (2).

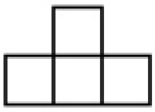

Рисунок 1

Задача 1. Докажите, что доску 10x10 нельзя замостить фигурками, состоящими из четырех единичных квадратов (см. рис. 1). [6]

Решение 1 (традиционное-математическое). Раскрасим данный квадрат по черно-белому, как показано на рис.2. На доске будет 50 белых и 50 черных клеток. Предположим, что мы смогли замостить доску 10x10 требуемым образом (понятно, что потребуется 25 фигурок). Заметим, что каждая фигурка будет накрывать либо три, либо одну черную клетку. Но так как фигурок нечетное количество и каждая из них накрывает нечетное количество черных клеток, то все фигурки вместе накрывают нечетное количество черных клеток, однако они должны были накрыть 50 черных клеток-четное число. Следовательно, доску 10x10 нельзя замостить данными фигурками.

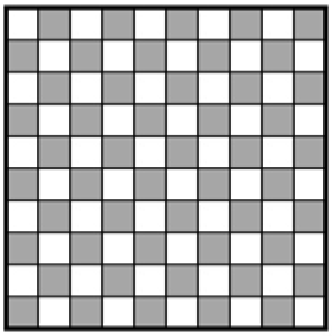

Рисунок 2

Предложим теперь другой подход к решению рассматриваемой задачи, основанный на физическом «инструментарии».

Решение 2 («физическое»). Представим себе исходную доску как однородную пластину. Понятно, что центр тяжести последней является центром симметрии исходного квадрата. Выберем центр тяжести доски-пластины в качестве начала координат, распрямим оси координат по сторонам квадрата и будем считать, что длина каждой ячейки квадрата равна 4 условным единицам (см. рис. 3). Теперь предположим, что стартовую фигуру (доску-пластину) можно замостить 25-ю маленькими фигурками, состоящими из четырех единичных квадратов (см. рис. 1). Это означает, что стартовую фигуру, как однородная доску-пластину (с массой m) можно разделить на 25 идентичных частей (масса каждой из которых равна $1/25$ массе стартовой доски, т. е. $m_i = m/25$). Ясно, что центр масс каждой из этих маленьких фигур-плиток, независимо от их расположения, в указанной выше системе координат расположен в точке M_i (см. рис. 4), обе целочисленные координаты которой, очевидно, имеют разные четности (одна-четная, другая-нечетная). Таким образом, учитывая вышеизложенное, согласно формулам (2) мы будем иметь:

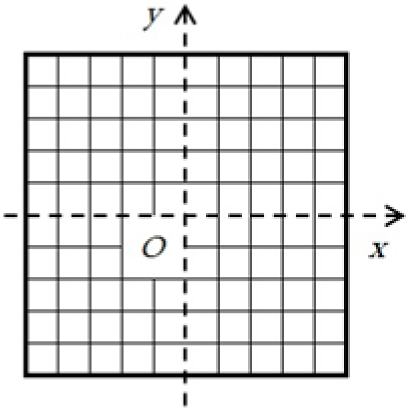

Рисунок 3

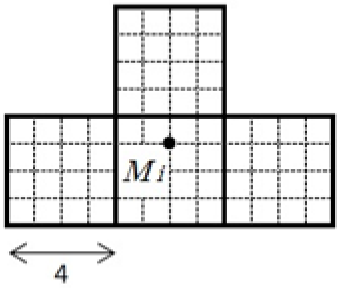

Рисунок 4

$$\begin{cases} x_C = 0 = \sum\limits_i m_i x_i \Big/ m = \sum\limits_{i=1}^{25} x_i \Big/ 25 \\ y_C = 0 = \sum\limits_i m_i y_i \Big/ m = \sum\limits_{i=1}^{25} y_i \Big/ 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{25} x_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{25} y_i = 0 \end{cases}. \qquad (3)$$

Обратим внимание на то, что мы пришли к противоречию, потому что из (3) следует, что и среди x_i целочисленных координат и среди y_i целочисленных координат имеем четное количество нечетных координат, в то время как мы уже упоминали выше, что среди всех 25-и пар чисел $(x_i; y_i)$ все координаты x_i и y_i имеют разные четности, т.е. среди всех 25-и пар чисел $(x_i; y_i)$ имеем 25 четных и 25 нечетных координат.

Причиной полученного противоречия было наше первоначальное предположение, что стартовую доску-пластину можно полностью покрыть 25-ю маленькими фигурными плитками, следовательно, мы можем утверждать, что стартовая доска-пластина не может быть покрыта маленькими фигурными плитками, показанными на рис. 1.

Задача 2. Докажите, что доску 8x8 нельзя замостить 15 фигурками 1x4 и одной фигуркой, указанной на рисунке 5. [4]

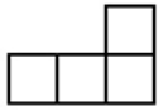

Рисунок 5

Решение 1 (традиционное-математическое). Раскрасим данную доску по черно-белому, как показано на рис. 6. На доске будут 32 белые и 32 черные клетки. Предположим, что мы смогли замостить доску 8x8 требуемым образом. Заметим, что каждая фигурка 1x4, независимо от расположения, будет накрывать 2 или 4 черные клетки (т.е. в четном количестве), а фигурка, указанная на рисунке 5, независимо от расположения, будет накрывать 1 или 3 черные клетки (т.е. в нечетном количестве). Следовательно, 15-ю фигурками 1x4 и одной фигуркой, указанной на рисунке 5, можно замостить нечетное количество черных клеток, однако на доске, как уже отметили, имеем 32 черные клетки, следовательно, доску 8x8 нельзя замостить данными фигурками.

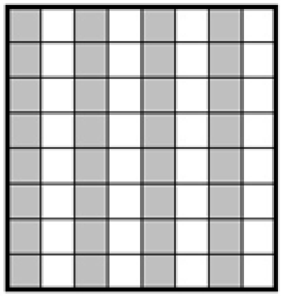

Рисунок 6

Предложим теперь другой подход к решению рассматриваемой задачи, опять основанный на физическом «инструментарии».

Решение 2 («физическое»). Представим себе исходную доску как однородную пластину. Понятно, что центр тяжести последней является центром симметрии исходного квадрата. Выберем центр тяжести доски-пластины в качестве начала координат, распрямим оси координат по сторонам квадрата и будем считать, что длина каждой ячейки квадрата равна 4 условным единицам.

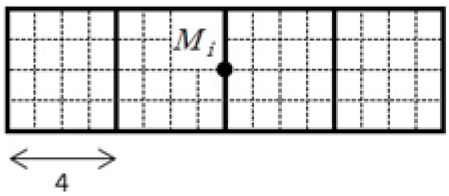

Рисунок 7

Теперь предположим, что стартовую фигуру (доску-пластину) можно замостить 15 фигурками 1x4 и одной фигуркой, указанной на рисунке 5. Это означает, что стартовую фигуру, как однородную доску-пластину (с массой m) можно разделить на 16 частей (масса каждой из которых равна $1/16$ массе стартовой доски, т. е. $m_i = m/16$ и 15 из которых идентичны). Ясно, что центр масс каждой из 15-и маленьких фигур-плиток, независимо от их расположения, в указанной выше системе координат расположен в точке M_i (см. рис. 7), обе целочисленные координаты которой очевидно, четные, а центр масс одной фигурки, указанной на рисунке 5, независимо от ее расположения, в указанной выше системе координат расположен в точке N (см. рис. 8), обе целочисленные координаты которой (x_N и y_N), очевидно, нечетные. Таким образом, учитывая вышеизложенное, согласно формулам (2) мы будем иметь:

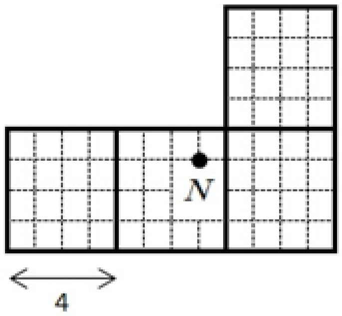

Рисунок 8

$$\begin{cases} x_C = 0 = \sum_i m_i x_i \Big/ m = \left(\sum_{i=1}^{15} x_i + x_N \right) \Big/ 16 \\ y_C = 0 = \sum_i m_i y_i \Big/ m = \left(\sum_{i=1}^{15} y_i + y_N \right) \Big/ 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{15} x_i + x_N = 0 \\ \sum_{i=1}^{15} y_i + y_N = 0 \end{cases}. \quad (4)$$

Обратим внимание на то, что мы пришли к противоречию, потому что из (4) следует, что и среди x_i целочисленных координат и среди y_i целочисленных координат имеем нечетное количество нечетных координат, в то время как мы уже упоминали выше, что все координаты x_i и y_i - четные. Причиной полученного противоречия было наше первоначальное предположение, что стартовую доску-пластину можно замостить 15 фигурками 1x4 и одной фигуркой, указанной на рисунке 5, следовательно, мы можем утверждать, что стартовая доска-пластина не может быть покрыта вышеуказанным образом.

Задача 3. Можно ли квадрат 8x8 клеток с вырезанной угловой клеткой разрезать на столбики 1x3. [5]

Решение 1 (традиционное-математическое). Раскрасим клетки квадрата в три цвета, как показано на рисунке 9 (будем иметь 22 клетки цвета «1», 20 клеток цвета «2» и 21 клетку цвета «3»). Очевидно, что каждый столбик размерами 1x3 при любом расположении закрывает по одной клетке каждого цвета. Если бы покрытие было возможно, то на квадрате с вырезанной угловой клеткой были бы по 21 клетке каждого цвета «1», «2» и «3», однако это не так, следовательно, покрытие невозможно.

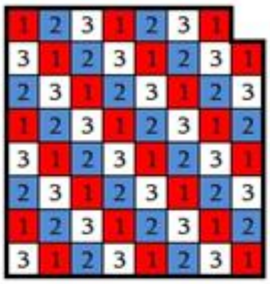

Рисунок 9

Предложим теперь другой подход к решению рассматриваемой задачи, непосредственно применяя формулы центра масс (2).

Решение 2 («физическое»). Представим себе доску 8х8 как однородную пластину. Понятно, что центр тяжести последней является центром симметрии квадрата 8х8. Выберем центр тяжести доски-пластины в качестве начала координат, распрямим оси координат по сторонам квадрата и будем считать, что длина каждой ячейки квадрата равна 4 условным единицам. В этой системе координат сначала найдем центр тяжести квадрата 8х8 клеток с вырезанной угловой клеткой (как показано на рис. 9). Квадрат 8х8 клеток с вырезанной угловой клеткой мысленно разделим на две части: 1-клетка симметрична вырезанной угловой клетке, 2-остальной части, и, непосредственно применяя формулы (2), будем иметь: $x_C = -2/9$; $y_C = -2/9$.

Теперь предположим, что стартовую фигуру - квадрат 8х8 клеток с вырезанной угловой клеткой - можно разрезать на столбики 1х3. Это означает, что стартовую фигуру, как однородную доску-пластину (с массой m) можно разделить на 21 идентичные части (масса каждой из которых равна $1/21$ массе стартовой доски, т. е. $m_i = m/21$). Ясно, что центр масс каждых из этих 21 столбиков, независимо от их расположения в указанной выше системе координат, расположен в точке M_i (см. рис. 10), обе целочисленные координаты которой очевидно, четные. Таким образом, учитывая вышеизложенное, согласно формулам (2) мы будем иметь:

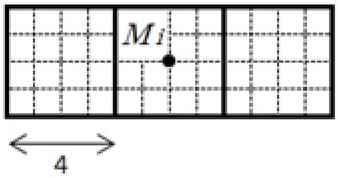

Рисунок 10

$$\begin{cases} x_C = -2/9 = \sum\limits_i m_i x_i \Big/ m = \sum\limits_{i=1}^{21} x_i \Big/ 21 \\ y_C = -2/9 = \sum\limits_i m_i y_i \Big/ m = \sum\limits_{i=1}^{21} y_i \Big/ 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{21} x_i = -14/3 \\ \sum\limits_{i=1}^{21} y_i = -14/3 \end{cases}. \qquad (5)$$

Обратим внимание на то, что мы пришли к противоречию, поскольку суммы целочисленных-четных координат $\sum\limits_{i=1}^{21} x_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{21} y_i$ не могут быть равны $-14/3$. Причиной полученного противоречия было наше первоначальное предположение, что квадрат 8x8 клеток с вырезанной угловой клеткой можно разрезать на столбики 1x3, следовательно, такое разрезание невозможно.

Заключение. По существу, особо следует отметить, что предлагаемое «физическое» решение впечатляет не только с точки зрения выделения междисциплинарных связей, но и с точки зрения применимости. В частности, хотя в рассмотренных задачах традиционные-типовые решения по своей природе творческие и эвристические, но все же многолетний опыт преподавания показывает, что большинство учащихся испытывают трудности в решении таких задач как в правильном выборе цветов, так и в разумном выборе принципов раскраски данной области, поэтому они затрудняются решать такие задачи, в то время как предлагаемое «физическое» решение и по своей природе и по своим механизмам применения довольно простое, поэтому может быть эффективным и простым в использовании инструментом для решения задач покрытия, разрезания или обхода областей.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21T-5C039.

ԶԱՆԳՎԱԾՆԵՐԻ ԿԵՆՏՐՈՆԻ ԲԱՆԱՁԵՎԻ ՈՐՈՇ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Նիկողոսյան Գ. Ս., Մանուկյան Վ. Ֆ., Սերոբյան Ե. Ս.

Դիդակտիկայի տեսակետից միջառարկայական կապերի կիրառումը որոշ չափով բարձրացնում է դասավանդման գիտական մակարդակը, նպաստում տրամադրվող նյութի հեշտ յուրացմանը: Գաղտնիք չէ, որ մաթեմատիկան այս հարցում «թելադրող» դեր ունի՝ նպաստելով տարբեր ֆիզիկական երևույթների ու օրինաչա-փությունների հիմնավորմանը: Չնայած այս «թելադրող» հանգամանքին՝ մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի միջառարկայական կապը երկակի բնույթ ունի. մի կողմից մաթեմատիկական գիտելիքները օգտագործվում են ֆիզիկական երևույթների և խնդիրների ուսումնասիրման համար, մյուս կողմից՝ կա հետադարձ կապ, երբ ֆիզիկական օրենքները լրացնում են մաթեմատիկական գիտելիքների շրջանակը, մաթեմատիկական «վերացական» նյութի ուսուցումը դարձնում առավել առարկայական և հետաքրքիր:

Հոդվածը նվիրված է ֆիզիկական որոշ «գործիքների» հնարավոր արդյունավետ կիրառությունների վերհանմանը մաթեմատիկական նյութի դասավանդման գործընթացում: Մասնավորապես, հիմնվելով ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացից հայտնի զանգվածների կենտրոնի շառավիղ վեկտորի որոշման $\vec{r}_C = \sum_i m_i \vec{r}_i \Big/ m$ վեկտորական բանաձևի վրա, աշխատանքում առաջարկվում է նորարարական ֆիզիկական մոտեցում՝ կոմբինատորիկայում հանդիպող տիրույթների ծածկման վերաբերյալ խնդիրների լուծման համար, որն էլ աշխատանքի գիտամանկավարժական նորույթն է:

Դիտարկելով այդպիսի խնդիրներ՝ հոդվածում նախ համառոտ կներկայացնենք վերջիններիս ավանդական մաթեմատիկական լուծումները, որից հետո կառաջարկենք նորարարական ֆիզիկական լուծումներ՝ օգտագործելով մարմնի զանգվածի կենտրոնի որոշման բանաձևը՝ դրանով իսկ վեր հանելով ֆիզիկայի և մաթեմատիկայի միջառարկայական հետադարձ կապի ևս մեկ դրսևորում:

Բանալի բառեր. վեկտոր, զանգվածների կենտրոն, մաթեմատիկա, ֆիզիկա, միջառարկայական կապեր, տիրույթների ծածկման խնդիրներ:

ON SOME APPLICATIONS OF THE FORMULA OF THE CENTER OF MASS

Nikoghosyan G. S., Manukyan V. F., Serobyan Y. S.

From the point of view of didactics, the use of intersubject links to some extent raises the scientific level of teaching, promotes easy assimilation of the presented material. It is no secret that mathematics plays a "dictating" role in this connection, contributing to the substantiation of various physical phenomena and regularities. Despite this "dictating" circumstance, the interdisciplinary connection of mathematics and physics has a dual nature. On the one hand, mathematical knowledge is used to study physical problems and questions, on the other hand, there is a feedback loop when physical regularities fill the field of application of mathematical knowledge, making the teaching of mathematical "abstract" material more objective and interesting.

The article is devoted to the identification of some possible useful applications of physical "tools" in the process of teaching mathematical material. In particular, on the basis of the vector formula $\vec{r}_C = \sum_i m_i \vec{r}_i \Big/ m$ for determining the radius-vector of the center of mass, well-known from the physics school program, the work offers an innovative-physical approach to solving the problems of covering areas encountered in combinatorics, which is the scientific and pedagogical novelty of the work.

Considering such tasks, in the article we will first briefly outline their traditional-mathematical solutions, after which we will offer innovative-physical solutions using the formula for determining the center of mass of the body, thus revealing one more manifestation of the inverse intersubjective connection between physics and mathematics.

Keywords: vector, center of mass, mathematics, physics, interdisciplinary connections, area coverage problems.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sicherl-Kafol B., Denac O. The importance of interdisciplinary planning of the learning process.// Procedia Social and Behavioral Sciences. 2010. 2. P. 4695–4701
2. Hye Sun You Why Teach Science with an Interdisciplinary Approach: History, Trends, and Conceptual Frameworks. Journal of Education and Learning. Vol.6, No. 4. 2017. P. 66-77. http://doi.org/10.5539/jel.v6n4p66
3. Коменский Я. А. Великая дидактика. М.: Наркомпрос. 1939. 318с.
4. Amram M., Dagan M., Levi S., Mouftakhov A. Formalising the use of the centre of mass method in mathematical problems// The teaching of mathematics. 2019. Vol. XXII. 1. P. 17–32
5. Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. М.: МЦНМО. 2004. 560с.
6. Екимова М. А., Кукин Г. П. Задачи на разрезание. М.: МЦНМО. 2002. 120 с.
7. Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи. М.: МЦНМО. 2008. 96с.
8. Гашков С. Б. Центры тяжести и геометрия. М.: МЦНМО. 2015. 61с.
9. Балк М. Б., Болтянский В. Г., Геометрия масс. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1987. 160 с. (Б-чка «Квант». Вып. 61).

Сведения об авторах
Никогосян Г. С. *– кандидат физ.-мат. наук*
Ширакский государственный университет
Эл. почта: gagonik@mail.ru
Манукян В. Ф. *– кандидат физ.-мат. наук, доцент*
Ширакский государственный университет
Эл. почта: mvardan_1972@mail.ru
Серобян Е. С. *– кандидат физ.-мат. наук, доцент*
Ширакский государственный университет
Эл. почта: eserobyan56@mail.ru

Поступила в редакцию 28.03.2023
Прошла рецензию 15.06.2023