ՇԻՐԱԿԻ Մ. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
ШИРАКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. НАЛБАНДЯНА
M. NALBANDYAN STATE UNIVERSITY OF SHIRAK
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ SCIENTIFIC PROCEEDINGS

Պրակ Բ
Выпуск Б
Issue B

2023 № 1

ՀՏԴ 372.851, 372.853
DOI 10.54151/27382559-23.1pb-155

ԴԱՍԱՎԱՆԴՄԱՆ ՄԵԹՈԴԻԿԱՆԵՐ

ԴԻՎԵՐԳԵՆՏ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Սարգսյան Ս. Հ., Մանուկյան Վ. Ֆ., Նիկողոսյան Գ. Ս.

Սույն աշխատանքը նվիրված է մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացներում դիվերգենտ խնդիրների հնարավոր արդյունավետ կիրառությունների վերհանմանը: Հոդվածում նախապես ներկայացված է դիվերգենտ խնդրի էությունը, վերջինիս նպաստող դերը սովորողների տրամաբանական և ստեղծագործական մտածողության ձևավորման և զարգացման գործում, որից հետո մեկնաբանված են դիվերգենտ խնդիրների տարատեսակները, ապա, ըստ յուրաքանչյուր տարատեսակի, մանրամասն քննարկված են մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացում հանդիպող դիվերգենտ խնդիրների օրինակներ: Դիվերգենտ խնդիրների առաջին տարատեսակը լուծման տարբեր եղանակների հնարավորություն ընձեռող խնդիրներն են: Որպես նման տարատեսակ՝ աշխատանքում քննարկված է արտահայտության մեծագույն արժեքի որոշման մաթեմատիկական մի առաջադրանք: Ի լրացումն ստանդարտ եղանակի՝ աշխատանքում՝ որպես սովորողների ստեղծագործական կարողությունները խթանող միջոց, առաջարկվում են խնդրի լուծման ևս երեք տարբերակներ, որոնք, լինելով միմյանցից էապես տարբեր, նպաստում են խնդրի համակողմանի դիտարկմանը: Հոդվածում քննարկված հաջորդ խնդիրը ավագ դպրոցի ֆիզիկայի դասընթացի «Մեխանիկա» բաժնից է: Այս խնդրի համար նույնպես տրված են երեք տարբեր մոտեցումներով լուծումներ: Ընդ որում՝ նշված մոտեցումները տարբերվում են ոչ այնքան մաթեմատիկական լուծումներով, որքան կիրառված ֆիզիկական գաղափարներով: Դիվերգենտ խնդիրների հաջորդ տարատեսակը իրենց պայմաններում երկիմաստություն, ազատություն կամ անորոշություն պարունակող խնդիրներն են: Հոդվածում մանրամասնորեն վերլուծված են այս տարատեսակը ներկայացնող շարժման վերաբերյալ մաթեմատիկայի մի խնդիր և

ֆիզիկայի «Դինամիկա» բաժնի ոչ ստանդարտ մի խնդիր: Հոդվածում բերված են մեթոդական ցուցումներ, որոնց կիրառումը կնպաստի դիվերգենտ խնդիրների լուծման ուղիների որոնմանը և հնարավորինս զերծ կպահի նման առաջադրանքներ կազմելիս կամ լուծելիս թույլ տված սխալներից, որն էլ աշխատանքի գիտամանկավարժական նորույթն է:

Բանալի բառեր. մաթեմատիկա, ֆիզիկա, խնդիր, մեթոդ, պայման, անորոշություն, տրամաբանություն:

Ներածություն: Հայտնի է, որ մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի դպրոցական դասընթացի դաստիարակչական նպատակներից հիմնականը սովորողների ստեղծագործական, տրամաբանական մտածողության ձևավորումն ու զարգացումն է, որին հասնելու հնարավորություններից մեկը ուսուցման գործընթացում տարբեր բարդության խնդիրների ներառումն է [1]: Առհասարակ «խնդիր» բառը գործածվում է չափազանց լայն իմաստներով, ինչպես, օրինակ, նպատակ, որ ձգտում են իրագործել, կամ հանձնարարություն, առաջադրանք, որ պետք է կատարել, կամ հարց, որին պետք է պատասխանել՝ օգտագործելով որոշակի գիտելիքներ և տրամաբանական հնարքներ, կամ ուսուցման, ինչպես նաև սովորողների գիտելիքների, կարողությունների, հմտությունների ստուգման միջոց: Խնդիրը ենթադրում է առաջին հայացքից պարզորոշ երևացող, բայց անմիջապես անհասանելի նպատակին հասնելու համապատասխան միջոցների գիտակցական որոնման անհրաժեշտություն: Լուծել խնդիրը՝ նշանակում է գտնել այդ միջոցները: Մաթեմատիկական կամ ֆիզիկական խնդիրը սովորաբար լուծվում է տրամաբանական եզրահանգումների, մաթեմատիկական գործողությունների կամ ֆիզիկական փորձի օգնությամբ: Ակնհայտ է, որ խնդիրների լուծումը զարգացնում է սովորողների տեսական գիտելիքները գործնականում կիրառելու ունակությունը, նպաստում վերջիններիս ստեղծագործական և տրամաբանական մտածողության ձևավորմանն ու զարգացմանը: Վերջապես, խնդրի լուծումը աշակերտների մեջ աշխատասիրության, կամքի, նպատակին հասնելու հաստատակամության խթանման և դաստիարակման զորեղ լծակ է:

Մաթեմատիկական և ֆիզիկական շատ խնդիրներ թույլ են տալիս լուծման բազմապիսի եղանակներ և մոտեցումներ, որոնք միմյանցից էապես տարբերվում են թե կիրառման եղանակի, թե գործիքակազմի առումով: Հանդիպում են նաև այնպիսի խնդիրներ, որոնց պայմանը ինչ-որ իմաստով պարունակում է որոշակի երկիմաստություն կամ անորոշություն: Մեթոդական գրականությունում այդպիսի խնդիրներին ընդունված է անվանել դիվերգենտ [2,3]: Ուսուցման պրոցեսում հանդիպելով նմանատիպ խնդիրների՝ սովորողները հնարավորություն են ունենում կիրառել տարբեր մեթոդներ, նույն ելակետային պայմաններում դիտարկել տարբեր հնարավոր ելքեր, ինչը, բնականաբար, նպաստում է վերջիններիս ստեղծագործական և տրամաբանական մտածողության ձևավորմանն ու զարգացմանը:

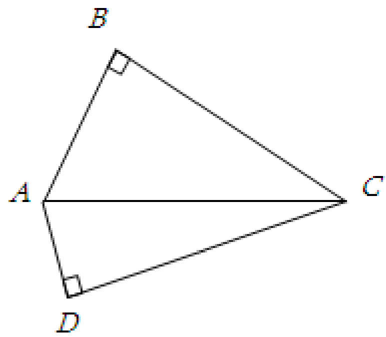
Սույն աշխատանքում կդիտարկենք և մանրամասն կքննարկենք դիվերգենտ խնդիրների յուրաքանչյուր տարատեսակին համապատասխան մաթեմատիկական և ֆիզիկական խնդիրներ, ինչպես նաև մեթոդական ցուցումների տեսքով կնշենք այն հնարավոր ուղիները, որոնք հնարավորություն կտան ուսուցման գործընթացում թեմատիկ տիպային խնդիր դիտարկելիս քննարկել նաև աստիճանական բարդացման սկզբունքով կազմած դիվերգենտ թեմատիկ խնդրաշարքեր, որն էլ աշխատանքի գիտամանկավարժական նորույթն է:

Լուծման տարբեր եղանակների հնարավորություն ընձեռող դիվերգենտ խնդիրներ:

Ինչպես արդեն նշել ենք, մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի ուսուցման պրոցեսը ենթադրում է տարատեսակ խնդիրների դիտարկում: Ըստ էության՝ թեմատիկ տիպային խնդիրները հնարավորություն են ընձեռում նախ ամրապնդել ձեռք բերված տեսական գիտելիքները, ապա վերջիններս կիրառել գործնականում: Դասավանդման տարիների փորձը փաստում է, որ ուսուցման արդյունավետության տեսակետից խիստ անհրաժեշտ է թեմատիկ տիպային խնդիրների լուծման ժամանակ չբավարարվել դիտարկվող խնդիրը թեմատիկայի շրջանակում տիպային եղանակով լուծելով, այլ հնարավորության դեպքում սովորողներին առաջարկել փորձել խնդիրը լուծել դիտարկվող թեմատիկայից տարբերվող այլ մոտեցումներով ու մեթոդներով, ինչը հնարավորություն կտա լավագույնս օգտագործել ներառարկայական և միջառարկայական կապերը և զարգացնել սովորողների ստեղծագործական և տրամաբանական մտածողությունը: Ըստ էության՝ արդյունքում կունենանք դիվերգենտ խնդիր, որի լուծումով սովորողները կամրապնդեն իրենց գիտելիքները ոչ միայն դիտարկվող թեմատիկայի, այլ նաև նախկինում յուրացրած նյութի շրջանակում: Որպես ասվածի հիմնավորում՝ դիտարկենք երկու խնդիր:

Խնդիր 1: Որոշել $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$ արտահայտության մեծագույն արժեքը [4]:

Լուծում: I եղանակ: Ներմուծենք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներ հետևյալ կոորդինատներով՝ $\vec{a}\left\{x;\sqrt{1-x^2}\right\}$ և $\vec{b}\left\{\sqrt{1-y^2};y\right\}$, իսկ վերջիններիս կազմած անկյունը նշանակենք φ-ով: Հեշտ է նկատել, որ $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$: Հաշվենք այս վեկտորների սկալյար արտադրյալը նախ՝ ըստ կոորդինատների, ապա՝ ըստ մոդուլների, ունենք՝ $\vec{a}\cdot\vec{b}=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=$ $=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=\cos\varphi\le 1$, ընդ որում՝ հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն ժամանակ, երբ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համուղղված են (մասնավորաբար, երբ $x=0$ և $y=1$ կամ երբ $x=1$ և $y=0$), հետևաբար $\max\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)=1$:



Նկար 1. *B* և *D* ուղիղ անկյուններով *ABCD* արտագծելի քառանկյուն:

II եղանակ: Տրված արտահայտության ԹԱԲ-ի համար կունենանք՝ $x\in[-1;1]$ և $y\in[-1;1]$: Հեշտ է նկատել, որ ելակետային արտահայտությունն իր հնարավոր մեծագույն արժեքն ընդունում է ոչ բացասական x-ի և ոչ բացասական y-ի դեպքում, և ուրեմն, վերջինիս մեծագույն արժեքը կարող ենք փնտրել $x\in[0;1]$ և $y\in[0;1]$ տիրույթում: Նկատի ունենալով վերոգրյալ նկատառումները՝ կարող ենք կատարել հետևյալ նշանակումները՝ $x=\sin\alpha;\ y=\sin\beta;\ \alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right];\ \beta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$:

Արդյունքում կունենանք՝

$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\sin\alpha|\cos\beta|+\sin\beta|\cos\alpha|=\sin(\alpha+\beta)\le 1$, ընդ որում՝ հավասարության դեպքը տեղի ունի այն և միայն այն ժամանակ, երբ $\sin(\alpha+\beta)=1$ (մասնավորաբար, երբ $\alpha=0$ և $\beta=\frac{\pi}{2}$ կամ երբ $\alpha=\frac{\pi}{2}$ և $\beta=0$), հետևաբար $\max\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)=1$:

III եղանակ: Պարզ է, որ երբ երբ $x=0$ և $y=1$ կամ երբ $x=1$ և $y=0$, ապա $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1$: Այժմ, առանց ընդհանրությունը խախտելու, տրված արտահայտության մեծագույն արժեքը որոշենք $x\in(0;1)$ և $y\in(0;1)$ տիրույթում: Դիտարկենք միավոր ներքնաձիգով երկու ուղղանկյուն եռանկյուններ՝ $\Delta ABC\left(\angle B=90^0\right)$ և $\Delta ADC\left(\angle D=90^0\right)$, որոնցում $AB=x;\ AD=y$, իսկ B և D կետերը գտնվում են AC եզրով տարբեր կիսահարթություններում (տես նկ. 1): Պարզ է, որ $BC=\sqrt{1-x^2}$ և $CD=\sqrt{1-y^2}$: Հեշտ է նկատել, որ $ABCD$ քառանկյունն արտագծելի է (ընդ որում՝ AC-ն այդ արտագծած շրջանագծի տրամագիծն է), հետևաբար վերջինիս համար տեղի ունի Պտղոմեոսի թեորեմը, համաձայն որի՝ $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD\Leftrightarrow x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=BD\le 1$, (մասնավորաբար, հավասարության դեպքը տեղի ունի, երբ $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=1\ \Rightarrow\ x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$), հետևաբար $\max\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)=1$:

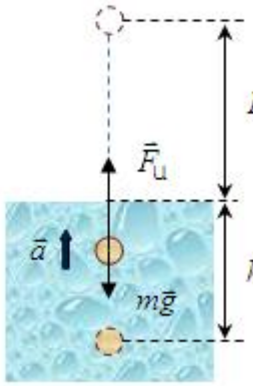
Պատ.՝ 1:

Դիտարկվող խնդիրը սովորաբար քննարկում են անհավասարությունների ապացուցման թեմատիկայի շրջանակում և, ըստ էության, Կոշու-Բունյակովսկու անհավասարության կիրառմամբ, հեշտությամբ կարելի է գնահատել տրված արտահայտության մեծագույն արժեքը: Սակայն չբավարարվելով վերոգրյալ տիպային լուծմամբ և առաջարկելով լուծման այլ մոտեցումներ (վեկտորական, եռանկյունաչափական, երկրաչափական)՝ մենք հնարավորություն ենք ստեղծում ինչպես վերհիշել և ամրապնդել նախկինում յուրացված նյութը, այնպես էլ զարգացնել սովորողների որոնողական ընդունակությունները, ստեղծագործական և տրամաբանական մտածողությունը:

Խնդիր 2: $\rho=400$ կգ/մ³ խտությամբ նյութից պատրաստված գնդիկը $H=0.09$ մ բարձրությունից առանց սկզբնական արագության ընկնում է ջրի մակերևույթին: Ի՞նչ ամենամեծ խորությամբ կընկղմվի այն: Օդի և ջրի դիմադրություններն անտեսել [5]:

Լուծում: I եղանակ: *Խնդիրը լուծենք՝ օգտվելով ուղղագիծ հավասարաչափ փոփոխական շարժման կինեմատիկայի և դինամիկայի հավասարումներց: Դուրս չգալով դինամիկայի շրջանակներից՝ կօգտվենք նաև ծանրության և արքիմեդյան ուժերի բանաձևերից:*

Մինչև ջրի մակերևույթ հասնելը գնդիկը կատարում է ազատ անկում՝ առանց սկզբնական արագության: Հետևաբար ջուր մտնելիս նրա արագությունը կարելի է որոշել $v=\sqrt{2gH}$ բանաձևով: Ջրի մեջ մարմնի վրա ազդում են ծանրության և արքիմեդյան ուժերը, որոնց համատեղ ազդեցության տակ այն կատարում է հավասարաչափ դանդաղող շարժում (նկ. 2): Նյուտոնի երկրորդ օրենքից ունենք $F_ա - mg = ma$: Դինամիկայի վերը գրված բանաձևի մեջ տեղադրելով արքիմեդյան ուժի $F_ա = \rho_{ջր} gV$ և գնդիկի զանգվածի $m=\rho V$ արտահայտություն-ները՝ արագացման համար ստանում ենք $a=(\rho_{ջր}-\rho)g/\rho$ տեսքը: Գնդիկի՝ ջրում սուզման սկզբնական արագությունը v - է, իսկ առավելագույն h խորության վրա այն կանգ է առնում: Օգտվելով հավասարաչափ փոփոխական շարժման տեղափոխության՝ սկզբնական ու վերջնական արագություններից և արագացումից կախումն արտահայտող կինեմատիկական բանաձևից և արագացման համար վերևում ստացված բանաձևից՝ h առավելագույն խորության համար ի վերջո ստանում ենք հետևյալ արտահայտությունն ու թվային արժեքը.



Նկար 2

$$h=v^2/2a=\rho H/(\rho_{ջր}-\rho)=0.06 \text{ մ}:$$

II եղանակ: *Այժմ ներկայացնենք կինետիկ էներգիայի թեորեմի կիրառմամբ խնդրի լուծման ևս մի տարբերակ: Ինչպես կտեսնենք, այս տարբերակով լուծման ընթացքում անհրաժեշտություն չի առաջանում օգտվել որևէ կինեմատիկական առնչությունից և դինամիկայի հավասարումից: Կիրառելու ենք միայն դիտարկվող ուժերի կատարած աշխատանքների արտահայտությունները:*

Համաձայն կինետիկ էներգիայի թեորեմի՝ մարմնի վրա ազդող ուժերի կատարած աշխատանքների գումարը հավասար է մարմնի կինետիկ էներգիայի փոփոխությանը: Մարմնի սկզբնական և վերջնական արագությունների զրո լինելու հետևանքով մարմնի կինետիկ էներգիայի փոփոխությունը զրո է: Գնդիկի ամբողջ շարժման ընթացքում ծանրության ուժը կատարում է $mg(H+h)$ աշխատանք, իսկ ջրի մեջ շարժվելու ընթացքում, լինելով շարժմանը հակառակ արքիմեդյան ուժ, կատարում է $-F_{\text{l}}h$ աշխատանք: Արդյունքում օգտվելով կինետիկ էներգիայի թեորեմից ստանում ենք.

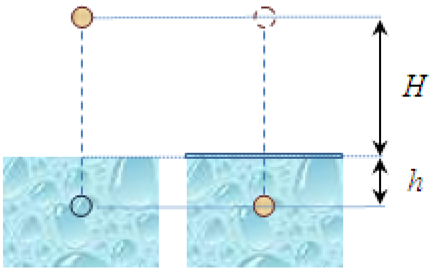
$$\Delta E_{\text{П}} = mg(H+h) - F_{\text{l}}h = 0:$$

Արքիմեդյան ուժի և զանգվածի արտահայտությունները տեղադրելով վերը գրված հավասարության մեջ՝ ստանում ենք.

$$\rho Vg(H+h) = \rho_{\text{збхс}} gVh \Rightarrow h = \rho H / (\rho_{\text{збхс}} - \rho) = 0.06 \text{ մ}:$$

III եղանակ: *Լուծման այս տարբերակում էլ կօգտվենք լրիվ մեխանիկական էներգիայի պահպանման օրենքից՝ կրկին չկիրառելով կինեմատիկական և դինամիկական մոտեցումներ: Այս դեպքում անհրաժեշտություն չի առաջանում անմիջականորեն դիտարկել նաև ուժերի կատարած աշխատանքները, և խնդիրը լուծվում է զուտ էներգիական եղանակով:*

Քանի որ դիմադրության ուժերը բացակայում են, ջուր-գնդիկ համակարգի մեխանիկական էներգիան պահպանվում է: Մյուս կողմից՝ զրոյի է հավասար համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխությունը, և համաձայն էներգիայի պահպանման օրենքի՝ պետք է զրո լինի նաև պոտենցիալ էներգիայի փոփոխությունը: Պրոցեսի վերջնարդյունքում գնդիկը $H+h$ չափով իջնում է ներքև, ինչի հետևանքով նրա պոտենցիալ էներգիան նվազում է $mg(H+h)$ ով, իսկ գնդիկի ստորին դիրքին համապատասխան ջուրը արտամղվում և բարակ շերտով տարածվում է ջրի մակերևույթին (նկ. 3): Եթե գնդիկի ծավալով ջրի այդ մասի զանգվածը նշանակենք $m_{\text{збхс}}$-ով, ապա ջրի պոտենցիալ էներգիայի փոփոխությունը կլինի $m_{\text{збхс}}gh$: Համակարգի պոտենցիալ էներգիայի գումարային փոփոխությունը հավասարեցնելով զրոյի՝ ստանում ենք.



Նկար 3

$$\Delta E_{\text{e}} = -mg(H+h) + m_{\text{збхс}}gh:$$

Օգտվելով գնդիկի և դրա ծավալով ջրի զանգվածների $m = \rho V$ և $m_{\text{збхс}} = \rho_{\text{збхс}}V$ բանաձևերից հեշտությամբ որոշում ենք որոնելի h խորությունը.

$$h = \rho H / (\rho_{\text{збхс}} - \rho) = 0.06 \text{ մ}:$$

Պայմանում երկիմաստություն պարունակող դիվերգենտ խնդիրներ:

Հաջորդ տեսակի դիվերգենտ խնդիրները իրենց պայմանների ձևակերպման մեջ երկիմաստություն, ազատություն կամ անորոշություն պարունակող խնդիրներն են: Դրանց թվին կարելի է դասել նաև այն խնդիրները, որոնց պայմաններում առկա են հնարավոր տարբերակների գոյության «թաքնված» հնարավորություններ: Նշված բոլոր տեսակի խնդիրները սովորողների մոտ զարգացնում են ստեղծագործական մտածողություն և որոնողական կարողություններ:

Շատ է լինում, երբ սովորողը ստուգման ժամանակ նոր միայն գրքի պատասխանների մեջ է տեսնում հնարավոր քննարկելիք մյուս դեպքերը, որոնք ինքը չէր դիտարկել: Նույնիսկ բացթողումների և սխալների պատճառով ստեղծված նման իրավիճակները աշակերտներին սովորեցնում են խնդիրները քննարկել համակողմանի ու լիարժեք: Սակայն ցանկալի է, որ ժամանակի ընթացքում նրանց մոտ ձևավորվի վարիատիվ մոտեցում պահանջող առաջադրանքի ի սկզբանե ընկալումը, հնարավոր դեպքերի առանձնացումն ու հետազոտումը: Հաճախ սովորողը պատկերացնում է հնարավոր դեպքերի բազմազանությունը, բայց չի կողմնորոշվում, թե ինչի՞ց և ինչպե՞ս սկսել լուծումը և թե հատկապես ի՞նչն է օգնելու առանձնացնել դեպքերը: Դասավանդման տարիների փորձառությունը հուշում է, որ ուսուցման արդյունավետության տեսակետից այս տիպի դիվերգենտ խնդիրներ քննարկելիս ցանկալի է մինչ տվյալ խնդրի դիտարկումը քննարկել աստիճանական բարդացման սկզբունքով կազմված վերջինիս երկիմաստ պայմանից բխող առանձին դեպքեր:

Կախված խնդրի դրվածքից՝ նման իրավիճակներում կարող են լինել դեպքերի առանձնացման տարբեր հնարներ: Օրինակ, հաճախ սկզբում ցանկալի է գտնել այն մեծությունները կամ օրինաչափությունները, որոնք դիտարկվող պրոցեսի բոլոր հնարավոր ընթացքների դեպքում մնում են նույնը: Երբ ընտրված դեպքերի համար անհրաժեշտ առնչությունները ստացված են, օգտակար է կատարել սահմանային անցումների վերլուծություն: Նման մոտեցումը ոչ միայն ստուգում է ստացված արդյունքների իսկությունը, այլև կարող է նպաստել լուծման ընթացքին:

Որպես ասվածի հիմնավորում՝ դիտարկենք ևս երկու խնդիր:

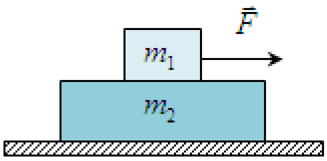
Խնդիր 3: A և B քաղաքներից, որոնց միջև հեռավորությունը 120 կմ է, միաժամանակ միմյանց ընդառաջ դուրս եկան, համապատասխանաբար, հեծանվորդն ու հետիոտնը: Պարզել, թե շարժումը սկսելուց որքա՞ն ժամանակ անց հեծանվորդի և հետիոտնի միջև հեռավորությունը կլինի 40 կմ, եթե հայտնի է, որ հեծանվորդն ու հետիոտնը հանդիպել են շարժումը սկսելուց 3 ժամ անց [6]:

Լուծում: Անհրաժեշտ է ուշադրություն դարձնել այն հանգամանքին, որ հեծանվորդի և հետիոտնի միջև հեռավորությունը 40 կմ կարող է լինել ինչպես մինչև նրանց հանդիպելը, այնպես էլ հանդիպելուց հետո (ըստ էության հենց սրանում էլ կայանում է խնդրի պայմանի «անորոշությունը», ինչի շնորհիվ էլ տեքստային տիպային խնդիրը «վերածվում» է դիվերգենտ խնդրի): Ըստ խնդրի պայմանի՝ հեծանվորդն ու հետիոտնը հանդիպել են շարժումը սկսելուց 3 ժամ անց, կնշանակի նրանք միասին (միաժամանակ) 3 ժամվա ընթացքում անցել են 120 կմ ճանապարհ (կամ որ նույնն է, յուրաքանչյուր մեկ ժամում միասին անցել են 40 կմ ճանապարհ): Եվ, ուրեմն, հեծանվորդի և հետիոտնի միջև հեռավորությունը կլինի 40 կմ, երբ շարժումը սկսելուց հետո նրանք միասին (միաժամանակ) կանցնեն 120-40=80 կմ կամ 120+40=160 կմ ճանապարհ, իսկ դա, համաձայն վերոգրյալի, կլինի շարժումը սկսելուց 80:40=2 ժ կամ 160:40=4 ժ հետո:

Պատ.՝ 2ժ կամ 4ժ:

Կարծում ենք, մինչ կոնկրետ այս խնդրի դիտարկումը, կարելի է նախապես աստիճանական բարդացման սկզբունքի համաձայն դիտարկել առավել պարզ տարբերակ, երբ կպահանջվի պարզել, թե շարժումը սկսելուց հետո որքան ժամանակ անց առաջին անգամ հեծանվորդի և հետնիոտնի միջև հեռավորությունը կլինի 40 կմ:

Խնդիր 4: Իրար վրա դրված m_1 և m_2 զանգվածներով մարմինները գտնվում են հորիզոնական հարթության վրա (նկ. 4): m_1 զանգվածով մարմնի վրա հորիզոնական ուղղությամբ ազդում է F ուժ: Մարմինների միջև շփման գործակիցը μ_1 է, իսկ ներքևի մարմնի և հարթության միջև՝ μ_2: Որոշել մարմինների արագացումները:



Նկար 4

Լուծում: Հաճախ աշակերտը խնդիրի լուծումը սկսում է երկու տարբեր արագացումներով շարժվող մարմինների համար դինամիկայի հավասարումների գրառմամբ և ապա այդ հավասարումներից փորձում է որոշել որոնելի արագացումները: Մինչդեռ մի փոքր ուշադիր լինելու դեպքում պարզ կդառնար, որ միշտ չէ, որ մարմինները կունենան տարբեր արագացումներ: Փոխադարձ բավականին մեծ և հարթության հետ փոքր շփման հետևանքով դրանք կարող են հարթության վրա սահել նաև համատեղ: Դեռ ավելին, եթե F ուժը լինի շատ փոքր, հնարավոր է, որ երկու մարմիններն էլ մնան տեղում և ձեռք չբերեն արագացումներ: F ուժի հորիզոնական լինելու հետևանքով հեշտ է տեսնել, որ երկու մարմինների միջև շփման ուժի առավելագույն արժեքը $\mu_1 m_1 g$ - է, իսկ ներքևի մարմնի ու հատակի միջև՝ $\mu_2(m_1+m_2)g$: Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը.

ա) $\mu_2(m_1+m_2) > \mu_1 m_1$: Սա այն դեպքն է, երբ ներքևի մարմնի ու հատակի միջև դադարի շփման ուժի առավելագույն արժեքը փոքր է մարմինների միջև դադարի շփման ուժի առավելագույն արժեքից: Այս դեպքում հնարավոր է երկու տարբերակ: Առաջին դեպքում երբ $\mu_2(m_1+m_2)g > \mu_1 m_1 g > F,$ (ուժը փոքր է դադարի շփման ուժերի այդ սահմանային արժեքներից), երկու մարմիններն էլ գտնվում են դադարի վիճակում և ակնհայտորեն ձեռք չեն բերում արագացում՝ $a_1 = a_2 = 0$: F ուժի մնացած արժեքների դեպքում ներքևի չորսուն կրկին չի շարժվի (համաձայն պայմանի՝ վերևի չորսուի կողմից ազդող $\mu_1 m_1 g$ ուժը փոքր է նրա շարժմանը խոչընդոտող $\mu_2(m_1+m_2)g$ ուժից), իսկ վերևի չորսուն կարագանա F ուժի և սահքի շփման $\mu_1 m_1 g$ ուժի տարբերության շնորհիվ.

$$a_1 = F/m_1 - \mu_1 g,\ \ a_2 = 0:$$

բ) Երբ $\mu_1 m_1 > \mu_2(m_1+m_2)$ կրկին գործ ունենք տարբեր դեպքերի հետ: Պարզ է, որ $\mu_1 m_1 g > \mu_2(m_1+m_2)g > F$ պայմանի դեպքում երկու չորսուներն էլ կլինեն դադարի վիճակում՝ $a_1 = a_2 = 0$: Երբ F ուժը մի փոքր գերազանցում է $\mu_2(m_1+m_2)g$ արժեքը, ներքևի չորսուն տեղից պոկվում է, և չորսուները շարժվում են համատեղ: Դիտարկելով այդ համակարգի շարժման դինամիկայի հավասարումը՝ հեշտությամբ կարելի է ստանալ մարմինների արագացումը.

$$a_1 = a_2 = \left(F - \mu_2(m_1+m_2)g\right)/(m_1+m_2):$$

Ֆիզիկական նկատառումներից և ստացված առնչությունից նույնպես պարզ է, որ ուժի մեծացմանը զուգընթաց՝ մարմինների արագացումը աճում է: Սակայն համատեղ շարժման արագացումը չի կարող ընդունել շատ մեծ արժեքներ: Հեշտ է հասկանալ, որ ներքևի չորսուի արագացումը, որը առաջանում է շփման ուժերի տարբերության հաշվին, կարող է ընդունել առավելագույնը $\mu_1 m_1 g - \mu_2(m_1+m_2)g$ արժեք: Փաստորեն դրա հաղորդած

$$a_0 = \left(\mu_1 m_1 - \mu_2(m_1+m_2)\right) g / m_2$$

արագացումն էլ հանդիսանում է մարմինների համատեղ շարժման արագացման հնարավոր առավելագույն արժեքը: Դրան համապատասխան ուժի համար հեշտությամբ կարելի է ստանալ հետևյալ արտահայտությունը.

$$F_0 = m_1(\mu_1 - \mu_2)(m_1+m_2) g / m_2 :$$

Փաստորեն, երբ $F < F_0$, մարմինները շարժվում են համատեղ՝ միևնույն արագացմամբ, իսկ երբ $F > F_0$, նրանց մեջ առաջանում է հարաբերական սահք: Օգտվելով դինամիկայի հավասարումներից՝ մարմինների արագացումների համար կարելի է ստանալ հետևյալ արտահայտությունները.

$$a_1 = F / m_1 - \mu_1 g,\ a_2 = \left(\mu_1 m_1 g - \mu_2(m_1+m_2) g\right) / m_2 :$$

Հեշտ է տեսնել, որ ուժի $F = F_0$ սահմանային արժեքի դեպքում արագացումների վերը գրված արտահայտությունները համընկնում են նախորդ դեպքի համապատասխան արտահայտություններին:

Ինչպես տեսանք, դիտարկված խնդիրը պահանջեց բազմակողմանի վերլուծություն: Սա անելուց հետո ֆիզիկական պարամետրերի ցանկացած թվային արժեքների դեպքում հեշտությամբ կարելի է որոշել, թե կոնկրետ որ դեպքի հետ գործ ունենք, և կատարելով հաշվումներ՝ որոշել մարմինների արագացումների թվային արժեքները: Պարզ է, որ չի կարելի մարմինների զանգվածների և շփման գործակիցների համար ընտրել պատահական արժեքներ և ընդունել, որ դրանք շարժվում են տարբեր արագացումներով կամ համատեղ: Ֆիզիկայի 3-րդ շտեմարանի առաջին հրատարակությունում [7] այս խնդիրը առաջարկված է լուծել ֆիզիկական մեծությունների հետևյալ արժեքների համար.

$$m_1 = 4\,\text{կգ},\ m_2 = 2\,\text{կգ},\ \mu_1 = 0.2,\ \mu_2 = 0.1,\ F = 10\,\text{Ն}:$$

Այս տվյալները համապատասխանում են վերևում քննարկված բ) դեպքին: Ընդ որում՝ չորսուների համատեղ շարժման համար ուժի սահմանային արժեքի համար ստացվում է $F_0 = 12$Ն և քանի որ $F < F_0$, ապա մարմինները պետք է շարժվեն համատեղ: Մինչդեռ ընդունելով որ մարմինները շարժվում են տարբեր արագացումներով, շտեմարանում տրված է դրանց հետևյալ պատասխանները՝ $a_1 = 0.5$ մ/վ^2, $a_2 = 1$մ/վ^2: Ըստ այդ պատասխանների՝ ներքևի մարմնի արագացումը մեծ է վերևինի արագացումից, ինչը ակնհայտորեն անհնար է: Շտեմարանի երկրորդ վերահրատարակման ժամանակ արդեն նկատվեց այս վրիպումը, և տվյալների անհրաժեշտ փոփոխության միջոցով շտկվեց այն [8]:

Եզրակացություն: Դասավանդման տարիների փորձառությունը վկայում է, որ շատ ավելի նպատակահարմար և արդյունավետ է դիվերգենտ խնդիրների քննարկումը թեմատիկ ընդհանրացնող կրկնությունների ժամանակ: Կարող ենք փաստել, որ մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի ուսուցման գործընթացում դիվերգենտ խնդիրների ներառումը կխթանի սովորողների որոնողական ունակությունները, կնպաստի տեսական նյութի իմաստավորված յուրացմանը, առարկայի հանդեպ հետաքրքրության աճին, կզարգացնի սովորողների տրամաբանական և ստեղծագործական մտածողությունը՝ հնարավորություն ստեղծելով աշակերտակենտրոն կրթական միջավայրում դառնալ այդ միջավայրի լիարժեք մասնակիցն ու կրողը, ինչը վերջնարդյունքում կհանգեցնի ուսուցման արդյունավետության և ըստ այդմ՝ կրթության որակի աճին:

Հետազոտությունն իրականացվել է ՇՊՀ-ի կողմից տրամադրվող ֆինանսական աջակցության շնորհիվ՝ № ShSU 02-SCI-2022 ծածկագրով գիտական թեմայի շրջանակներում:

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ ДИВЕРГЕНТНЫХ ЗАДАЧ

Саркисян С. О., Манукян В. Ф., Никогосян Г. С.

Данная работа посвящена выявлению возможных эффективных применений дивергентных задач в школьных курсах математики и физики. В статье сначала излагается сущность дивергентной задачи, ее способствующая роль в формировании и развитии логического и творческого мышления учащихся, после чего интерпретируются разновидности дивергентных задач, а затем по каждой разновидности подробно обсуждаются примеры дивергентных задач, встречающихся в школьных курсах математики и физики. Первая разновидность дивергентных задач - это задачи, допускающие различные пути решения. В качестве примера в данной работе обсуждается одна математическая задача определения наибольшего значения выражения. Помимо стандартного метода, в работе в качестве средства стимулирования творческих способностей учащихся предлагаются еще три варианта решения задачи, которые, существенно отличаясь друг от друга, способствуют всестороннему рассмотрению задачи. Следующая задача, обсуждаемая в статье, из раздела «Механики» школьного курса физики. Приведены три различных подхода к решению этой задачи. При этом указанные подходы различаются не столько математическими решениями, сколько принимаемыми физическими идеями. Следующим типом дивергентных задач являются задачи, имеющие неоднозначность, свобода или неопределенность в своих условий. В статье подробно анализируются математическая задача о движения и нестандартная задача динамики, как дивергентные задачи второго типа. В статье приведены методические указания, применение которых будет способствовать поиску путей решения дивергентных задач и позволит максимально уберечь от ошибок, допущенных при составлении или решении таких задач, в чем заключается научно-педагогическая новизна статьи.

Ключевые слова: математика, физика, задача, метод, условие, неопределенность, логика.

ON SOME APPLICATIONS OF DIVERGENT PROBLEMS

Sargsyan S. H., Manukyan V. F., Nikoghosyan G. S.

The paper is devoted to identifying possible effective applications of divergent problems in school courses in mathematics and physics. The article first outlines the essence of the divergent task, its contributing role in the formation and development of the logical and creative thinking of students, after which the varieties of divergent tasks are interpreted, and then, for each variety, examples of divergent tasks found in school courses in mathematics and physics are discussed in detail. The first kind of divergent problems are problems that allow different solutions. As an example, this paper discusses one mathematical problem of determining the largest value of an expression. In addition to the standard method, as a means of stimulating the creative abilities of students, three more options for solving the problem are proposed, which, differing significantly from each other, contribute to a comprehensive consideration of the problem. The next problem discussed in the article is from the "Mechanics" section of the school physics course. Three different approaches to solving this problem are presented. At the same time, these approaches differ not so much in mathematical solutions as in the accepted physical ideas. The next type of divergent problems are problems that have ambiguity, freedom or uncertainty in their conditions. The article analyzes in detail the mathematical problem of motion and the non-standard problem of dynamics, as divergent problems of the second type. The study provides guidelines, the use of which will contribute to the search for ways to solve divergent problems, and will allow you to protect as much as possible from mistakes made in the preparation or solution of such problems, which is the scientific and pedagogical novelty of the article.

Keywords: mathematics, physics, problem, method, condition, uncertainty, logic.

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Այվազյան Է. Ի. Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա: Եր., ԵՊՀ հրատ.: 2016: 202 էջ:
2. Вертгеймер М. Продуктивное мышление. М.: Прогресс. 1987.336с.
3. Крачовский С. М., Дивергентные задачи по математике и их визуальные образы. Москва: Прометей. 2016. 166с.
4. Шахно К. У. Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности. Минск, изд-во «Высшая школа». 1965. 523с.
5. Հովհաննիսյան Ռ., Ծարխատունյան Հ., Սարգսյան Է. Ֆիզիկայի խնդիրների և հարցերի ժողովածու: Եր., «Լույս»: 2004: 231 էջ:
6. Лурье М. В., Александров Б.И. Задачи на составление уравнений. М.: Наука. 1990. 96с.
7. https://old-lib.armedu.am/resource/2881 (29.03.2023)
8. Ալավերդյան Ռ. Բ., Մելիքյան Գ. Գ. և ուրիշներ Ֆիզիկա: Թեստային առաջադրանքների շտեմարան: Եր., «Էդիթ Պրինտ»: 2015: Մաս 3: 294 էջ:

Տեղեկություններ հեղինակների մասին

Սարգսյան Ս. Հ. *– ֆիզմաթ գիտությունների դոկտոր, պրոֆեսոր, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ*
Շիրակի պետական համալսարան
Էլ. փոստ՝ s_sargsyan@yahoo.com

Մանուկյան Վ. Ֆ. *– ֆիզմաթ գիտությունների թեկնածու, դոցենտ*
Շիրակի պետական համալսարան
Էլ. փոստ՝ mvardan_1972@mail.ru

Նիկողոսյան Գ. Ս. *– ֆիզմաթ գիտությունների թեկնածու*
Շիրակի պետական համալսարան
Էլ. փոստ՝ gagonik@mail.ru

Ստացվել է խմբագրություն՝ 28.03.2023
Գրախոսվել է՝ 19.06.2023