ՇԻՐԱԿԻ Մ. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
ШИРАКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. НАЛБАНДЯНА
M. NALBANDYAN STATE UNIVERSITY OF SHIRAK
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ SCIENTIFIC PROCEEDINGS

Պրակ Բ
Выпуск Б
Issue B

2022 № 1

ՀՏԴ 372.851
DOI 10.54151/27382559-2022.2b-98

ԴԱՍԱՎԱՆԴՄԱՆ ՄԵԹՈԴԻԿԱՆԵՐ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԴՊՐՈՑԱԿԱՆ ԴԱՍԸՆԹԱՑՈՒՄ ԼԱԳՐԱՆԺԻ ԹԵՈՐԵՄԻ ՈՐՈՇ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Նիկողոսյան Գ. Ս., Մանուկյան Վ. Ֆ.

Աշխատանքը նվիրված է մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում Լագրանժի թեորեմի հնարավոր արդյունավետ կիրառությունների վերհանմանը: Նախապես առանց ապացույցի ձևակերպված է Լագրանժի թեորեմը, որից հետո քննարկված են մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում հանդիպող տարբեր տիպային և ոչ տիպային խնդիրներ, որոնց լուծման համար առաջարկված են Լագրանժի թեորեմի անմիջական կիրառմամբ նոր մոտեցումներ, որոնք էապես տարբերվում են նմանատիպ խնդիրների լուծման հայտնի ավանդական մոտեցումներից:

Բանալի բառեր. մաթեմատիկա, խնդիր, ածանցյալ, Լագրանժի թեորեմ, հավասարում, անհավասարում:

Անցնելով տասներկուամյա կրթական համակարգի՝ դպրոցական դասընթացում տարբեր առարկաների՝ մասնավորապես մաթեմատիկայի ծրագրերում կատարվեցին փոփոխություններ. ավելացան նոր բաժիններ կամ էլ եղած բաժիններում մատուցվող նյութը դարձավ ավելի ընդգրկուն: Անկասկած, մաթեմատիկայի դպրոցական դասագրքերը շատ հաջողված են ուսումնական նյութի մատուցման առումով, սակայն, ցավոք սրտի, այդպես էլ չեն լրացնում այն ահռելի «խզվածքը», որն առկա է մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի ուսումնական և օլիմպիական ծրագրերի միջև: Օրինակ՝ մաթեմատիկայի ուսումնական ծրագրերում գրեթե չի խոսվում անորոշ հավասարումների և վերջիններիս լուծման տարրական եղանակների, ֆունկցիոնալ հավասարումների, Ռոլլի, Լագրանժի թեորեմների մասին, մինչդեռ վերջիններս իրենց անխուսափելի կիրառությունն ունեն օլիմպիական տարբեր առաջադրանքներում: Այս համատեքստում սույն աշխատանքում կանդրադառնանք Լագրանժի թեորեմի հնարավոր արդյունավետ կիրառությունների վերհանմանը, ինչն էլ հանդիսանում է աշխատանքի գիտամանկավարժական նորույթը: Հարկ ենք համարում նշել, որ [1] աշխատությունում ևս անդրադարձ է կատարվում Լագրանժի թեորեմին և դիտարկվում է մեկ հավասարում, որի լուծման ընթացքում անմիջականորեն կիրառվում է Լագրանժի թեորեմը: Ըստ էության՝ սույն աշխատանքը հանդիսանում է վերոգրյալի տրամաբանական զարգացումը, որում փորձել ենք Լագրանժի թեորեմի անմիջական կիրառմամբ դիտարկել այնպիսի խնդիրներ, որոնց լուծման «ավանդական» մոտեցումները թե՛ աշխատատարության, թե՛ դիտարժանության և թե՛ մաթեմատիկական գեղեցիկի ներկայացման առումով զգալիորեն զիջում են Լագրանժի թեորեմի կիրառմամբ առաջարկվող նոր մոտեցումներին: Ստորև, նախ առանց ապացույցի կնշենք Լագրանժի թեորեմը, որից հետո կդիտարկենք ինչպես [1] աշխատանքում դիտարկված վերոգրյալ խնդիրը, այնպես էլ մի քանի այլ խնդիրներ՝ հեղինակային կամ հայտնի խնդրագրքերից վերցված, որոնց լուծման ընթացքում անմիջականորեն կկիրառենք Լագրանժի թեորեմը՝ նպատակ հետապնդելով վեր հանել վերջինիս հնարավոր արդյունավետ կիրառությունները մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում:

Լագրանժի թեորեմը [2]: Դիցուք՝ 1) $f(x)$ ֆունկցիան որոշված ու անընդհատ է $[a;b]$ փակ միջակայքում, 2) գոյություն ունի $f'(x)$ վերջավոր ածանցյալ առնվազն $(a;b)$ բաց միջակայքում: Այդ դեպքում a -ի և b -ի միջև կգտնվի այնպիսի c $(a<c<b)$ կետ, որ նրա համար տեղի կունենա հետևյալ հավասարությունը՝

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}:$$

Այժմ անդրադառնանք [1] աշխատությունում դիտարկված և Լագրանժի թեորեմի կիրառմամբ լուծված խնդրին:

Խնդիր 1: Լուծել հավասարումը՝ $3\cdot 2^{x+2}-7x=17$: [1]

Լուծում: Հեշտ է նկատել, որ $x_1=1$ -ը և $x_2=-2$ -ը տրված հավասարման արմատներ են: Խնդրի լուծման «ավանդական» մոտեցման համաձայն՝ կառուցում են $y=3\cdot 2^{x+2}$ և $y=7x+17$ ֆունկցիաների գրաֆիկները և համոզվում, որ ելակետային հավասարումն ունի ճիշտ երկու արմատ: Ստորև, Լագրանժի թեորեմի կիրառմամբ ապացուցենք, որ ելակետային հավասարումն այլ արմատներ չունի: Այսպես, դիտարկենք $f(x)=3\cdot 2^{x+2}-7x-17$ ֆունկցիան, որը որոշված ու անընդհատ է ողջ թվային առանցքի վրա և ամենուրեք ունի վերջավոր ածանցյալ: Կատարենք հակասող ենթադրություն. ենթադրենք տրված հավասարումն ունի, օրինակ, x_1; x_2 և x_3 արմատներ այնպիսին, որ $x_1>x_2>x_3$ $\left(f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0\right)$: Այդ դեպքում, համաձայն Լագրանժի թեորեմի, $[x_3;x_2]$ և $[x_2;x_1]$ միջակայքերում գոյություն կունենան համապատասխանաբար $c_1\in(x_3;x_2)$ և $c_2\in(x_2;x_1)$ կետեր այնպիսին, որ $f'(c_1)=\dfrac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}=0$ և $f'(c_2)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=0$, սակայն հեշտ է նկատել, որ $f'(x)=3\cdot 2^{x+2}\cdot\ln 2-7=0$ հավասարումն ունի միայն մեկ արմատ: Ստացված հակասությունն էլ հիմնավորում է այն ենթադրությունը, որ ելակետային հավասարումը չի կարող ունենալ երկուսից ավել արմատներ:

Պատ.՝ $x_1=1$; $x_2=-2$:

Այժմ դիտարկենք հեղինակային կամ հայտնի խնդրագրքերից վերցված խնդիրներ, որոնց լուծման ժամանակ կօգտվենք Լագրանժի թեորեմից, ինչպես նաև համառոտ կնշենք վերջիններիս լուծման հայտնի «ավանդական» մոտեցումների մասին:

Խնդիր 2: Լուծել հավասարումը՝ $3^{x+2}=4x+9$:

Լուծում: Հեշտ է նկատել, որ $x_1=-2$-ը և $x_2=0$-ն տրված հավասարման արմատներ են: Խնդրի լուծման «ավանդական» մոտեցման համաձայն՝ կառուցում են $y=3^{x+2}$ և $y=4x+9$ ֆունկցիաների գրաֆիկները և համոզվում, որ ելակետային հավասարումն ունի ճիշտ երկու արմատ: Ստորև, Լագրանժի թեորեմի կիրառմամբ ապացուցենք, որ ելակետային հավասարումն այլ արմատներ չունի: Դիտարկենք $f(x)=3^{x+2}-4x-9$ ֆունկցիան, որը որոշված ու անընդհատ է ողջ թվային առանցքի վրա և ամենուրեք ունի վերջավոր ածանցյալ: Կատարենք հակասող ենթադրություն. ենթադրենք՝ տրված հավասարումն ունի, օրինակ, $x_1<x_2<x_3$ արմատներ $\left(f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0\right)$: Այդ դեպքում, համաձայն Լագրանժի թեորեմի, $[x_1;x_2]$ և $[x_2;x_3]$ միջակայքերում գոյություն կունենան $c_1\in(x_1;x_2)$ և $c_2\in(x_2;x_3)$ կետեր այնպիսին, որ

$f'(c_1)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=0$ և $f'(c_2)=\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=0$, սակայն հեշտ է նկատել, որ $f'(x)=3^{x+2}\cdot\ln 3-4=0$ հավասարումն ունի միայն մեկ արմատ: Ստացված հակասությունն էլ հիմնավորում է այն ենթադրությունը, որ ելակետային հավասարումը չի կարող ունենալ երկուսից ավել արմատներ:

Պատ.՝ $x_1=-2$; $x_2=0$:

Խնդիր 3: Որոշել $y=f(x)=(x^2-4)(x^2-3x)(x-4)$ ֆունկցիայի կրիտիկական կետերի քանակը:

Լուծում: Խնդրի լուծման «ավանդական» մոտեցման համաձայն՝ անհրաժեշտ է որոշել ֆունկցիայի ածանցյալը և վերջինիս միջոցով որոշել կրիտիկական կետերը: Ստորև, Լագրանժի թեորեմի կիրառմամբ առաջարկենք այլ մոտեցում: Նկատենք, որ $f(x)$-ը հինգերորդ աստիճանի բազմանդամ է, հետևաբար $f'(x)$-ը չորրորդ աստիճանի բազմանդամ է, որը կարող է ունենալ առավելագույնը չորս իրական արմատ: Հեշտ է նկատել, որ $f(-2)=f(0)=f(2)=f(3)=f(4)=0$ և $[-2;0]$; $[0;2]$; $[2;3]$ և $[3;4]$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում տրված $f(x)$ ֆունկցիան բավարարում է Լագրանժի թեորեմի պայմաններին, հետևաբար վերոգրյալ միջակայքերում կգտնվեն համապատասխանաբար ներքին $x_1\in(-2;0)$; $x_2\in(0;2)$; $x_3\in(2;3)$ և $x_4\in(3;4)$ կետեր այնպիսին, որ

$f'(x_1)=\dfrac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}=0$; $f'(x_2)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=0$; $f'(x_3)=\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}=0$;

$f'(x_4)=\dfrac{f(4)-f(3)}{4-3}=0$, այսինքն՝ $f'(x_1)=f'(x_2)=f'(x_3)=$ $=f'(x_4)=0$: Փաստորեն $f'(x)$ չորրորդ աստիճանի բազմանդամն ունի միմյանցից տարբեր x_1; x_2; x_3; x_4 իրական արմատներ, ուրեմն ելակետային $f(x)$ ֆունկցիան ունի չորս կրիտիկական կետ:

Պատ.՝ տրված ֆունկցիան ունի չորս կրիտիկական կետ:

Խնդիր 4: Ապացուցել, որ $e^x\ge ex$ $(x\in R)$: [3]

Լուծում: Խնդրի լուծման «ավանդական» մոտեցման համաձայն՝ անհրաժեշտ է դիտարկել և հետազոտել $f(x)=e^x-ex$ ֆունկցիան, կառուցել վերջինիս գրաֆիկը և համոզվել տրված անհավասարության ճշմարտացիության մեջ: Ստորև, Լագրանժի թեորեմի կիրառմամբ առաջարկենք այլ մոտեցում: Նկատենք, որ $x = 1$ դեպքում անհավասարությունը ճշմարիտ է: Դիցուք a-ն և b-ն կամայական իրական թվեր են այնպիսին, որ $a < 1 < b$: Դիտարկենք $y = f(x) = e^x - ex$ ֆունկցիան: Հեշտ է նկատել, որ $f(x)$ ֆունկցիան $[a;1]$ և $[1;b]$ միջակայքերում բավարարում է Լագրանժի թեորեմի պայմաններին, հետևաբար գոյություն ունեն $c_1 \in (a;1)$ և $c_2 \in (1;b)$ կետեր այնպիսին, որ

$$f'(c_1) = \frac{f(1) - f(a)}{1 - a} \Leftrightarrow 0 > e^{c_1} - e = \frac{ea - e^a}{1 - a} \Leftrightarrow e^a > ea$$

և

$$f'(c_2) = \frac{f(b) - f(1)}{b - 1} \Leftrightarrow 0 < e^{c_2} - e = \frac{e^b - eb}{b - 1} \Leftrightarrow e^b > eb:$$

Փաստորեն, կամայական $a < 1 < b$ իրական թվերի համար տեղի ունեն $e^a > ea$ և $e^b > eb$ անհավասարությունները, հետևաբար $e^x \geq ex$ անհավասարությունը ճշմարիտ է ցանկացած x իրական թվի համար:

Խնդիր 5: Ապացուցել, որ եթե $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, ապա $\alpha - \sin\alpha < \beta - \sin\beta$ [4]:

Լուծում: Խնդրի լուծման «ավանդական» մոտեցման համաձայն (որը բերված է նաև [4] աշխատությունում)՝ $\sin\alpha - \sin\beta$ տարբերությունը ներկայացնում են արտադրյալի տեսքով և օգտվում հետևյալ հայտնի անհավասարությունից, այն է՝ եթե $0 < x < \frac{\pi}{2}$, ապա $\sin x < x$: Ստորև, Լագրանժի թեորեմի կիրառմամբ առաջարկենք այլ մոտեցում: Դիտարկենք $y = f(x) = \sin x$ ֆունկցիան, որը որոշված ու անընդհատ է ողջ թվային առանցքի վրա և ամենուրեք ունի վերջավոր ածանցյալ: Կնշանակի $f(x)$ ֆունկցիան $[\alpha;\beta]$ միջակայքում (որտեղ $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$) բավարարում է Լագրանժի թեորեմի պայմաններին, հետևաբար գոյություն ունի $c \in (\alpha;\beta)$ կետ այնպիսին, որ

$$f'(c) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \cos c = \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\beta - \alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\beta - \sin\alpha =$$

$= \cos c \cdot (\beta - \alpha) < \beta - \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha - \sin\alpha < \beta - \sin\beta$, ինչն էլ պահանջվում էր ապացուցել:

Խնդիր 6: Ապացուցել, որ $\frac{1}{52} < \ln\frac{52}{51} < \frac{1}{51}$: [5]

Լուծում: Խնդրի լուծման «ավանդական» մոտեցման համաձայն (որը բերված է նաև [5] աշխատությունում), նկատի ունենալով $\ln\frac{52}{51} = \int_{51}^{52}\frac{dx}{x}$ առնչությունը, $\ln\frac{52}{51}$-ը դիտարկում են որպես կորագիծ սեղանի մակերես և գնահատում վերջինս ինչպես հավելորդով, այնպես էլ պակասորդով: Ստորև, Լագրանժի թեորեմի կիրառմամբ առաջարկենք այլ մոտեցում: Դիտարկենք $y = f(x) = \ln x$ ֆունկցիան, որը որոշված ու անընդհատ է $(0;+\infty)$ միջակայքում և այդ միջակայքում ունի վերջավոր ածանցյալ: Նշանակի $f(x)$ ֆունկցիան $[51;52]$ միջակայքում բավարարում է Լագրանժի թեորեմի պայմաններին, հետևաբար գոյություն ունի $c \in (51;52)$ կետ այնպիսին, որ $f'(c) = \frac{f(52) - f(51)}{52 - 51}$ $\Leftrightarrow$ $\ln 52 - \ln 51 = \frac{1}{c}$ $\Leftrightarrow$ $\ln\frac{52}{51} = \frac{1}{c}$, որտեղից, նկատի ունենալով, որ $\frac{1}{52} < \frac{1}{c} < \frac{1}{51}$, կունենանք՝ $\frac{1}{52} < \ln\frac{52}{51} < \frac{1}{51}$, ինչն էլ պահանջվում էր ապացուցել:

Ամփոփելով կարող ենք փաստել, որ մաթեմատիկայի արդի ուսուցման կարևոր խնդիրներից է սովորողներին առարկայական տարբեր մեթոդներով, թեորեմներով, հնարքներով և սկզբունքներով «զինելը»: Լագրանժի թեորեմն անշուշտ դրանցից մեկն է, որի արդյունավետ կիրառությունը, երբ տիպային խնդիրները լուծում ենք ոչ տիպային եղանակներով, կարող է նպաստել սովորողների որոնողական ընդունակությունների, էվրիստիկ և տրամաբանական մտածողության զարգացմանը, ինչն էլ վերջնարդյունքում կհանգեցնի ուսուցման արդյունավետության և, ըստ այդմ, կրթության որակի բարձրացմանը:

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ ТЕОРЕМЫ ЛАГРАНЖА В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Никогосян Г. С., Манукян В. Ф.

Работа посвящена выявлению возможных эффективных применений теоремы Лагранжа в школьном курсе математики. Сначала без доказательства сформулирована Теорема Лагранжа, после чего обсуждены различные типовые и нестандартные задачи, встречающиеся в школьном курсе математики, для решения которых предложены новые подходы, использующие прямое применение теоремы Лагранжа, существенно отличающиеся от известных традиционных подходов к решению подобных проблем.

Ключевые слова: математика, задача, производная, теорема Лагранжа, уравнение, неравенство.

ON SOME APPLICATIONS OF LAGRANGE'S THEOREM IN THE SCHOOL COURSE OF MATHEMATICS

Nikoghosyan G. S., Manukyan V. F.

The work is devoted to identifying possible effective applications of the Lagrange theorem in the school mathematics course. First, without proof, Lagrange's Theorem was formulated, after which various typical and non-standard problems encountered in school mathematics courses were discussed, for the solution of which new approaches were proposed using the direct application of Lagrange's theorem, which significantly differ from the known traditional approaches to solving such problems.

Keywords: mathematics, problem, derivative, Lagrange's theorem, equation, inequality.

Հետազոտությունն իրականացվել է ՇՊՀ-ի կողմից տրամադրվող ֆինանսական աջակցության շնորհիվ՝ № ShSU SCI-02-2020 ծածկագրով գիտական թեմայի շրջանակներում:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И., Уравнения и неравенства. М.: Изд-во Факториал, 1997. 219 с.
2. Ֆիխտենգոլց Գ. Մ., Մաթեմատիկական անալիզի հիմունքներ: Եր., «Լույս» հրատ.: 1970: 570 էջ:
3. Разумова О. В., Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа. Казань: ТГГПУ, 2009. 115 с.

4. Шахно К. У., Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности. Минск: Изд-во «Высшая школа», 1965. 524 с.
5. Гомонов С. А., Замечательные неравенства. М.: Дрофа, 2006. 254 с.

Տեղեկություններ հեղինակների մասին
Նիկողոսյան Գ. Ս.- *ֆիզմաթ գիտությունների թեկնածու, ասիստենտ*
Շիրակի պետական համալսարան
Էլ.փոստ՝ gagonik@mail.ru

Մանուկյան Վ. Ֆ. - *ֆիզմաթ գիտությունների թեկնածու, դոցենտ*
Շիրակի պետական համալսարան
Էլ. փոստ՝ mvardan_1972@mail.ru

Տրվել է խմբագրություն՝ 20.09.2021
Գրախոսվել է՝ 21.03.2022