ՇԻՐԱԿԻ Մ. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
ШИРАКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. НАЛБАНДЯНА
M. NALBANDYAN STATE UNIVERSITY OF SHIRAK
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ SCIENTIFIC PROCEEDINGS

Պրակ Բ
Выпуск Б
Issue B

2021 № 2

ՀՏԴ 519:37
DOI 10.54151/27382559-2021.2b-266

ԴԱՍԱՎԱՆԴՄԱՆ ՄԵԹՈԴԻԿԱՆԵՐ

ԱՌԱՋԻՆ ԿԱՐԳԻ ՍՈՎՈՐԱԿԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԿՈՇՈՒ ԽՆԴՐԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ԼՈՒԾՄԱՆ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ ԷՅԼԵՐԻ ԹՎԱՅԻՆ ՄԵԹՈԴԻ ՄԻՋՈՑՈՎ: ՀԱՄԱԿԱՐԳՉԱՅԻՆ ՏԵԽՆՈԼՈԳԻԱՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ

Ժամկոչյան Ք. Ա., Համբարյան Ժ. Բ.

Մեթոդական այս աշխատանքում քննարկվում է առաջին կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարման նախնական կամ Կոշու խնդրի մոտավոր լուծման կառուցման թվային մեթոդի կիրառման հարցը: Որպես այդպիսի թվային մեթոդ ընտրվում է Էյլերի հայտնի մեթոդը:

Ժամանակակից մեթոդական պահանջների լույսի ներքո ներկայացվում է Էյլերի թվային մեթոդի ալգորիթմը, կառուցվում է համապատասխան բլոկսխեման, բերվում է համակարգչի վրա հաշվումների իրականացման ծրագիրը Python լեզվով: Ծրագրում ուշադրություն է հատկացվում հաշվման ճշտության ապահովման հարցին: Կոնկրետ դիֆերերենցիալ հավասարման նախնական խնդրի մոտավոր լուծման կառուցումը տվյալ ծրագրով իրականացվում է համակարգչի օգնությամբ: Բացի այդ, քննարկվում է նաև դիֆերենցիալ հավասարման նախնական խնդրի լուծման համակարգչային MathCad ծրագրի կիրառման հարցը: Բերվում է օրինակ:

Բանալի բառեր. սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ, Կոշու խնդիր, Էյլերի թվային մեթոդ, մեթոդի ալգորիթմը, ծրագրավորում, համակարգչային տեխնոլոգիաներ:

1.Նախաբան: Գիտության տարբեր բնագավառների (մեխանիկա, ֆիզիկա, քիմիա, կենսաբանություն, ինժեներական գիտություններ, տնտեսագիտություն և այլն) խնդիրներ բերվում են նախնական կամ եզրային պայմաններով այս կամ այն տիպի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների կամ համակարգերի լուծմանը: Պետք է նշել, որ կիրառությունների տեսանկյունից՝ այն դիֆերենցիալ հավասարումները, որոնք լուծվում են այս կամ այն մեթոդով տարրական ֆունկցիաների միջոցով, կազմում են դիֆերենցիալ հավասարումների շատ փոքր դաս: Այնպես որ, կիրառությունների հիմնական մաթեմատիկական մոդելները հանդիսանում են այնպիսի դիֆերենցիալ հավասարումներ, որոնց լուծումներն ուղղակի հնարավոր չի լինում արտահայտել տարրական ֆունկցիաներով, այսինքն՝ բանաձևային տեսքերով, իսկ այդպիսի դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման անհրաժեշտությունը շատ մեծ է, շատ դեպքերում՝ հրամայական:

Այդ պատճառով սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների նախնական կամ եզրային խնդիրների լուծման համար զարգացվել են նրանց լուծումների կառուցման մոտավոր և թվային մեթոդները:

«Կիրառական մաթեմատիկա և ինֆորմատիկա» մասնագի-տությամբ սովորող ուսանողների համար՝ «Մոտավոր մեթոդներ» դասընթացի շրջանակում, ինչպես նաև մինչ այդ դասընթացը, «Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների տեսություն» դասընթացի շրջանակում մեծ տեղ է տրվում սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների Կոշու կամ եզրային խնդիրների լուծման մոտավոր և թվային մեթոդների շարադրմանը և կիրարկմանը: Անհրաժեշտ է հատուկ ընդգծել, որ նշված մասնագիտությամբ սովորող ուսանողների համար շատ կարևոր են մեթոդական այնպիսի աշխատանքները, որոնք առավել մատչելի և կիրառության համար միանգամյա հարմար կերպով ներկայացնում են սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների նախնական (կամ Կոշու) և եզրային խնդիրների թվային մեթոդների նկարագրումը և կիրարկումը. այդ թվային մեթոդների ալգորիթմների բերումը բլոկսխեմայի օգնությամբ, ծրագրավորումը՝ որևէ ծրագրային լեզվով, և կոնկրետ լաբորատոր աշխատանքների իրագործումը ԷՀՄ-ի միջոցով (լսարանային պայմաններում, ինչպես նաև տնային առաջադրանքների օրինակների շտեմարանների մշակումները): Ներկայումս կարևոր հարցերից մեկն էլ այն է, որ ուսանողները կարողանան տիրապետել սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների նախնական և եզրային խնդիրների լուծման համակարգչային ծրագրերին. դա այն նպատակով է, որ հետագայում իրենց մասնագիտությամբ աշխատանքի անցնելուց հետո նման խնդիրների լուծման վրա մեծ ժամանակ չծախսեն, կարողանան շատ կարճ ժամանակում համակարգչային ծրագրերի օգտագործմամբ (միայն տվյալների ներմուծմամբ) ստանալ իրենց հետաքրքիր խնդրի թվային լուծումը, ինչպես նաև կիրառելու համակարգչային ծրագրերի գրաֆիկական մեկնաբանման հնարավորությունները:

Այս աշխատանքում նախ շարադրվում է առաջին կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարման Կոշու խնդրի դրվածքը, լուծման գոյության և միակության թեորեմը [1-3]: Այնուհետև մեթոդական պատշաճ մակարդակով շարադրվում է առաջին կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարման Կոշու խնդրի թվային լուծման Էյլերի բեկյալների մեթոդը, նրա ալգորիթմը, ծրագրավորումը, հաշվումներն ԷՀՄ-ի վրա [1-4]: Իրականացվում է այս թեմայով լաբորատոր աշխատանք: Նկարագրվում է համակարգչային ծրագրերի ընդհանուր նկարագրումը և նրանց օգնությամբ համակարգչի միջոցով առաջին կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարման Կոշու խնդրի լուծման նկարագիրը և նրա կիրարկումը [4-6]:

2.Խնդրի դրվածքը: Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներից ամենապարզը ածանցյալի նկատմամբ լուծված առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումն է՝

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

Այս հավասարման հետ կապված հիմնական խնդիրը հայտնի է որպես Կոշու խնդիր՝ գտնել (1) հավասարման այն $y = y(x)$ լուծումը, որը բավարարում է հետևյալ նախնական պայմանին՝

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

Երկրաչափորեն դա նշանակում է՝ գտնել $y = y(x)$ ինտեգրալային կորը, որը անցնում է տրված $M_0(x_0, y_0)$ կետով:

Կոշու խնդրի լուծման գոյությունը և միակությունը ապահովում է հետևյալ թեորեմը.

<u>**Թեորեմ (Պիկարի):**</u> Ենթադրենք, որ $f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է (x_0, y_0) կետը պարունակող (որպես ներքին կետ) մի որոշ փակ սահմանափակ R ուղղանկյուն տիրույթում՝

$$R: |x - x_0| \le a, \qquad |y - y_0| \le b,$$

որտեղ a-ն և b-ն տրված դրական թվեր են:

Եթե $f(x, y)$ ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ երկու պայմաններին:

1. $f(x, y)$ ֆունկցիան անընդհատ է R–ի վրա և հետևաբար սահմանափակ է, այսինքն՝

$$|f(x, y)| \le M, \tag{3}$$

որտեղ M-ը դրական հաստատուն է,

2. $f(x,y)$ ֆունկցիան R-ի կետերում ունի ըստ y-ի՝ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ մասնական ածանցյալ, որը R-ում սահմանափակ ֆունկցիա է՝

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \le K, \tag{4}$$

որտեղ K-ն դրական հաստատուն է, (x,y)-ը՝ R տիրույթի ցանկացած կետ է:

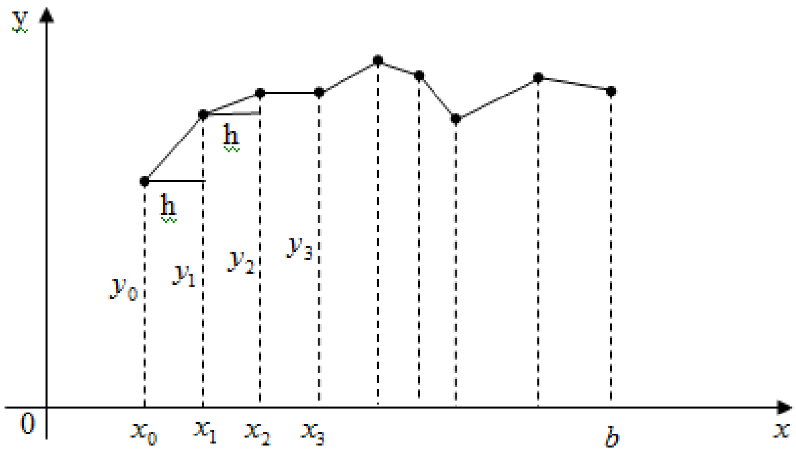
Այս պայմանների տեղի ունենալու դեպքում (1) դիֆերենցիալ հավասարումը կունենա $y = y(x)$ միակ լուծումը, որը բավարարում է (2) նախնական պայմանին: (1), (2) Կոշու խնդրի այս միակ լուծումը x_0 կետի մի որոշ շրջակայքում որոշված և անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիա է ($y = y(x)$ ֆունկցիան և $y'(x)$ ածանցյալ ֆունկցիան անընդհատ ֆունկցիաներ են x_0 կետի նշված շրջակայքում): x_0 կետի այդ շրջակայքը որոշվում է հետևյալ անհավասարության միջոցով՝

$$|x - x_0| \le h,$$

որտեղ $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$:

3. Առաջին կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարման թվային լուծման Էյլերի բեկյալների մեթոդը:

Դիցուք, ունենք (1) հավասարումը և (2) նախնական պայմանը: Էյլերի բեկյալների մեթոդի գաղափարը հետևյալն է: (1) դիֆերենցիալ հավասարման (2) նախնական պայմանին բավարարող ինտեգրալային կորը փոխարինում ենք բեկյալով (նկ. 1), որը ստացվում է հետևյալ կերպ.



Նկար 1. Էյլերի բեկյալի կառուցումը:

x – արգումենտի փոփոխման միջակայքը՝ $[x_0, b]$ բաժանում ենք n հավասար մասերի և ստացված կետերից տանում ենք զուգահեռ ուղիղներ Oy առանցքին: Այնուհետև (x_0, y_0) կետում որոշում ենք ինտեգրալային կորի շոշափողի անկյունային գործակիցը՝ (y_0')

$$y_0' = f(x_0, y_0) \tag{5}$$

$[x_0, x_1]$ հատվածում որոնելի ինտեգրալային կորը փոխարինում ենք իր շոշափողով (x_0, y_0) կետում: Այդ դեպքում

$$y_1 = y_0 + hy_0', \tag{6}$$

որտեղ $h = x_1 - x_0$ (և ընդհանրապես՝ $h = x_i - x_{i-1}$):

Ստանում ենք (x_1, y_1) կետը: Այդ կետում որոշում ենք որոնելի ինտեգրալային կորի շոշափողի անկյունային գործակիցը՝ $y_1' = f(x_1, y_1)$, և $[x_1, x_2]$ հատվածում ինտեգրալային կորը փոխարինում ենք իր շոշափողով՝ (x_1, y_1) կետում: x_2 աբսցիսին համապատասխան շոշափողի օրդինատը կլինի՝

$$y_2 = y_1 + hy_1' : \tag{7}$$

Նույն կերպ շարունակելով՝ կունենանք՝

$$y_3 = y_2 + hy_2', \tag{8}$$

որտեղ $y_2' = f(x_2, y_2)$,

....

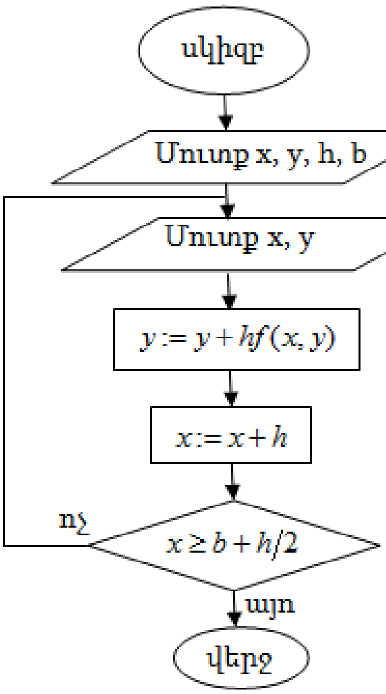
$$y_n = y_{n-1} + hy_{n-1}', \tag{9}$$

որտեղ $y_{n-1}' = f(x_{n-1}, y_{n-1})$:

Այսպիսով, որոնելի ինտեգրալային կորի համար մենք ստացանք բեկյալային մոտավորությունը:

Բնական է ենթադրել, որ եթե $h \to 0$, ապա Էյլերի բեկյալները (պետք է նկատի ունենալ, որ ամեն մի կոնկրետ h – ի համար մենք կունենանք մի որոշակի բեկյալ) կմոտենան որոնելի ինտեգրալային կորին [1], հետևաբար փոքր h – երի դեպքում Էյլերի մեթոդը $x = b$ կետում կտա իր ճշգրիտ արժեքին ավելի ու ավելի մոտ արժեքներ:

4.Էյլերի թվային մեթոդի ալգորիթմը (բլոկսխեման) և ծրագիրը: Էյլերի թվային մեթոդը կարելի է իրականացնել համակարգչի վրա: (1) տեսքի դիֆերենցիալ հավասարման՝ (2) նախնական խնդրի լուծման՝ Էյլերի թվային մեթոդի ալգորիթմը (բլոկսխեման) կարող ենք պատկերել նկար 2-ի տեսքով:



Նկար 2. Էյլերի մեթոդի ալգորիթմը:

Այստեղ մուտքային տվյալներ են հանդիսանում x և y նախնական արժեքները, h քայլը, ինտեգրման b աջ սահմանը: Էյլերի թվային մեթոդով առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների նախնական խնդրի լուծման ծրագիրը (Python լեզվով) բերվում է ներքևում.

```
import math
x=float(input())
y=float(input())
h=float(input())
b=float(input())
n=round((b-x)/h)
if x>=b+h/2:
   print('x-ը մեծ է b-ից')
for i in range(n):
   f=f(x,y)
   x=x+h
   y=y+h*f
   print('x=',x,' y=',y)
```

5.Էյլերի թվային մեթոդի կիրառությունները: Դիտարկենք օրինակ: Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը Էյլերի թվային մեթոդով:

$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{5}}$, $y_0(1.8) = 2.6$, x անկախ փոփոխականը փոփոխվում է $x \in [1.8, 2.8]$ հատվածում, $h = 0.2$ և $h = 0.1$ քայլերով:

Մուտքագրելով համապատասխան տվյալները, օգտվելով վերևում բերված ծրագրից՝ ԷՀՄ-ի օգնությամբ կունենանք տրված դիֆերենցիալ հավասարման նախնական խնդրի լուծումը աղյուսակային տեսքով (աղյուսակ 1):

Աղյուսակ 1:

y ֆունկցիայի արժեքները, երբ $h = 0.2$ և $h = 0.1$

x	y $(h = 0.2)$	y $(h = 0.1)$
1.8	2.6	2.6
1.9		2.819681
2	3.039362	3.040167
2.1		3.261130
2.2	3.481357	3.482344
2.3		3.703688
2.4	3.924134	3.925144
2.5		4.146791
2.6	4.367516	4.368799
2.7		4.591430
2.8	4.812883	4.815025

6.Համակարգչային ծրագրերի օգտագործումը [4-6]: Այժմ տրված դիֆերենցիալ հավասարման նախնական խնդիրը լուծենք MathCad համակարգչային համակարգում: Դրա համար ստեղնաշարի օգնությամբ պետք է հավաքել խնդրի տվյալները (նկար 3): Դրա համար վահանակի վրա սեղմելով «Математика»-ն, որից հետո՝ «Операторы и символы» բաժնում անհրաժեշտ է կատարել համապատասխան մուտքագրումները: Արդյունքում x_{i+1} կետերի աբսցիսների և դիֆերենցիալ հավասարման նախնական խնդրի մոտավոր լուծումների համար կունենանք համապատասխանաբար x-ի և y-ի վեկտոր-սյունակները, որոնք թույլ են տալիս կառուցել լուծման գրաֆիկը:

Նկար 3-ում բերվում են x-ի և y-ի արժեքները՝ վեկտոր-սյունակների տեսքերով, և նրանց օգնությամբ կառուցված է լուծման գրաֆիկը (այս ամենը համակարգչի միջոցով):

$$f(x,y) := x + \cos\left(\frac{y}{\sqrt[2]{5}}\right)$$
$$x_0 := 1.8$$
$$y_0 := 2.6$$
$$h := 0.1$$
$$i := 0..9$$
$$x_{i+1} := x_i + h$$
$$y_{i+1} := y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$x = \begin{bmatrix} 1.8 \\ 1.9 \\ 2 \\ 2.1 \\ 2.2 \\ 2.3 \\ 2.4 \\ 2.5 \\ 2.6 \\ 2.7 \\ 2.8 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 2.6 \\ 2.82 \\ 3.04 \\ 3.261 \\ 3.482 \\ 3.704 \\ 3.925 \\ 4.147 \\ 4.369 \\ 4.591 \\ 4.815 \end{bmatrix}$$

Նկար 3. Էյլերի թվային մեթոդով դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը MathCad համակարգչային համակարգում:

7.Եզրակացություն: Աշխատանքը մեթոդական ուղղվածություն ունի, որում շարադրվում է առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարման Կոշու խնդրի լուծման Էյլերի թվային մեթոդը, մշակվում է ծրագիրը Python լեզվով, իր բլոկսխեմայով, և դիտարկվող կոնկրետ օրինակի (առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարման Կոշու խնդիր) թվային լուծումը իրականացվում է անհատական համակարգչի միջոցով: Բացի այդ, Էյլերի թվային մեթոդով դիֆերենցիալ հավասարման նախնական խնդրի լուծման համար կիրառվում է համակարգչային MathCad ծրագիրը:

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ПОМОЩЬЮ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ЭЙЛЕРА. ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Жамакочян К. А., Амбарян Ж. Б.

В этой методической работе изучается вопрос применения численного метода для построения приближенного решения начальной

задачи (или задачи Коши) обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Для такого численного метода выбирается известный метод Эйлера.

На основе современных методических требований представляется алгоритм численного метода Эйлера, построена его блок-схема, приводится программа расчета на компьютере (язык программирования Python). В программе обращено внимание на вопрос об обеспечении точности расчета. На компьютере для выбранного примера начальной задачи дифференциального уравнения первого порядка на основе разработанной программы осуществляются вычисления. Кроме того, обсуждается вопрос применения компьютерной программы MathCad для решения начальной задачи обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Рассматривается пример.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, задача Коши, численный метод Эйлера, алгоритм метода, программирование, компьютерные технологии.

CONSTRUCTION OF AN APPROXIMATE SOLUTION OF THE FIRST ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION USING THE EULER'S NUMERICAL METHOD. APPLICATION OF COMPUTER TECHNOLOGIES

Zhamakochyan K. A., Hambaryan. Zh. B.

In this methodological work the problem of application of the numerical method to the first order ordinary differential equation to construct an approximate solution of the initial problem (or the Cauchy problem) is studied. The well-known Euler method is chosen as such numerical method.

On the basis of modern methodological requirements, an algorithm of the numerical Euler's method is presented, its block diagram is constructed and a computer calculation program (Python programming language) is presented. In the program attention is paid to the issue of ensuring the accuracy of the calculation. On the computer, for the selected example of the initial problem of the first-order differential equation, calculations are carried out on the basis of the developed program. In addition, the problem of application the MathCad computer program for solving the initial problem of first- order ordinary differential equation is discussed. An example is considered.

Keywords: ordinary differential equation, Cauchy problem, numerical Euler's method, method algorithm, programming, computer technologies.

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука. 1985. 232 с.
2. Агафонов С. А., Герман А. Д., Муратова Т. В. Дифферен-циальные уравнения. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2006. 352 с.
3. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. М.: ГИФМЛ. 1962. 368 с.
4. Лапчик М. П., Рагулина М. И., Хеннер Е. К. М.: Численные методы. Изд-во “Академия”. 2004. 384 с.
5. Линьков В. М., Яремко Н. Н. Высшая математика в примерах и задачах. Компьютерный практикум. М.: Финансы и статис-тика. 2006. 320 с.
6. Панюкова Т. А. Численные методы. М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”. 2013. 224 с.

<u>Տեղեկություններ հեղինակների մասին</u>

Ժամակոչյան Ք. Ա.- *ֆիզմաթ գիտությունների թեկնածու*
Շիրակի պետական համալսարան
Էլ. փոստ՝ knarikzhamakochyan@mail.ru

Համբարյան Ժ. Բ.- *ուսանողուհի*
Շիրակի պետական համալսարան
Էլ. փոստ՝ j.hambaryan@mail.ru

Տրվել է խմբագրություն՝ 01.11.2021
Գրախոսվել է՝ 29.11.2021