ՇԻՐԱԿԻ Մ. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
ШИРАКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. НАЛБАНДЯНА
M. NALBANDYAN STATE UNIVERSITY OF SHIRAK
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ SCIENTIFIC PROCEEDINGS

Պրակ Ա
Выпуск А
Issue A

2021 № 2

УДК 539.3
DOI 10.54151/27382559-2021.2a-24

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД ПРИ ИЗУЧЕНИИ ИЗГИБНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ ПО ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Саркисян Л. С.

В работе приведен вариационный принцип плоской задачи градиентной теории упругости и, применяя асимптотический метод, получены основные кинематические соотношения (которые можно сформулировать как гипотезы) для модели изгиба упругого тонкого стержня.

Ключевые слова: вариационный подход, прикладная модель изгиба тонкого стержня, градиентная теория упругости.

Введение. Решение одномерных задач тонких стержней и двумерных задач пластин и оболочек по классической теории упругости часто связано со значительными математическими трудностями. В этих случаях прибегают к использованию вариационных принципов [1-3]. Известно, что основные законы механики твердых деформируемых тел (в частности, теории тонких стержней, пластин и оболочек) описываются дифференциальными уравнениями и одновременно подчиняются так называемым минимальным принципам (например, положение равновесия механической системы отвечает минимуму полной потенциальной энергии). При этом проблема решения граничной задачи для дифференциальных уравнений теории упругих тонких стержней, пластин и оболочек, эквивалента проблеме нахождения функции, дающий минимум одномерного или двойного интеграла (функционала), которым выражается потенциальная энергия системы. Тогда проблема решения краевой задачи для дифференциальных уравнений эквивалентна задаче вариационного исчисления о нахождении минимума функционала, для которого исходные дифференциальные уравнения являются уравнениями

Эйлера-Лагранжа. Для решения задачи вариационного исчисления могут применяться известные прямые методы (методы Ритца и Бубнова-Галеркина).

С другой стороны, вариационные принципы теории упругости, моментной теории упругости, градиентной теории упругости, дают возможность получить основные дифференциальные уравнения и соответствующие им граничные условия для тонкостенных элементов конструкций.

На основе трехмерной градиентной теории упругости [4], в работе [5] для прямоугольной области в декартовых координатах приведены основные уравнения, граничные условия и вариационный принцип, типа Лагранжа, плоской задачи градиентной теории упругости.

В работе [6], используя асимптотический метод сингулярного возмущения, построены прикладные-одномерные модели растяжения-сжатия и изгиба тонких стержней по градиентной теории упругости.

В данной работе на основе результатов работ [5,6] развывается вариационный подход для изучения изгибной деформаций тонких стержней по градиентной теории упругости.

1. Основные уравнения и вариационный принцип плоской задачи градиентной теории упругости для прямоугольной области.

В работе [5] установлен вариационный принцип типа Лагранжа (принцип возможных перемещений) плоской задачи градиентной теории упругости для прямоугольной области:

$$\begin{aligned}\delta\int_0^a\int_{-h}^h W dx dy &= \int_0^a \tilde{q}_1\delta u_1\Big|_{y=+h} dx + \int_0^a \tilde{q}_2\delta u_2\Big|_{y=+h} dx - \int_0^a \tilde{q}_1\delta u_1\Big|_{y=-h} dx - \\ &- \int_0^a \tilde{q}_2\delta u_2\Big|_{y=-h} dx + \int_{-h}^h \tilde{p}_1\delta u_1\Big|_{x=a} dy + \int_{-h}^h \tilde{p}_2\delta u_2\Big|_{x=a} dy - \\ &- \int_{-h}^h \tilde{p}_1\delta u_1\Big|_{x=0} dy - \int_{-h}^h \tilde{p}_2\delta u_2\Big|_{x=0} dy = 0,\end{aligned} \tag{1}$$

где W – поверхностная плотность потенциальной энергии деформации градиентной теории упругости

$$W = \frac{1}{2}\lambda\left(e_{21} + e_{22}\right)^2 + \mu\left(e_{11}^2 + e_{22}^2 + 2e_{12}^2\right)^2 +$$
$$+ l^2\left\{\frac{1}{2}\lambda\left[\left(\frac{\partial e_{11}}{\partial x} + \frac{\partial e_{22}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial e_{11}}{\partial y} + \frac{\partial e_{22}}{\partial y}\right)^2\right] + \right. \tag{2}$$
$$\left. + \mu\left[\left(\frac{\partial e_{11}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial e_{11}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial e_{22}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial e_{22}}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial e_{12}}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial e_{12}}{\partial y}\right)^2\right]\right\};$$

λ, μ – упругие постоянные Ламе; l – параметр, который имеет размерность длины, характеризует внутреннюю микроструктуру материала; e_{11}, e_{22}, e_{12} – компоненты тензора деформации; $a \times 2h$ – размеры прямоугольной области.

Из вариационного уравнения (1) следуют уравнения равновесия и граничные условия плоской задачи градиентной теории упругости:

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

Граничные условия

$$\left.\left\{\sigma_{21} - l^2\left[\lambda\left(\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial y^2}\right) + 2\mu\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x \partial y}\right]\right\}\right|_{y=\pm h} = \tilde{q}_1^{\pm},$$
$$\left.\left[\sigma_{22} - 2\mu l^2\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x \partial y}\right]\right|_{y=\pm h} = \tilde{q}_2^{\pm}, \tag{4}$$
$$\left.l^2\left[\lambda\left(\frac{\partial e_{11}}{\partial y} + \frac{\partial e_{22}}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial e_{22}}{\partial y}\right]\right|_{y=\pm h} = 0, \qquad \left.2\mu l^2\frac{\partial e_{12}}{\partial y}\right|_{y=\pm h} = 0,$$

$$\left.\left[\sigma_{11} - 2\mu\alpha^2\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x \partial y}\right]\right|_{x=0,a} = \tilde{P}_1,$$
$$\left.\left\{\sigma_{12} - l^2\left[\lambda\left(\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial y^2}\right) + 2\mu\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x \partial y}\right]\right\}\right|_{x=0,a} = \tilde{P}_2, \tag{5}$$
$$\left.l^2\left[\lambda\left(\frac{\partial e_{11}}{\partial x} + \frac{\partial e_{22}}{\partial x}\right) + 2\mu\frac{\partial e_{11}}{\partial x}\right]\right|_{x=0,a} = 0, \qquad \left.2\mu l^2\frac{\partial e_{12}}{\partial x}\right|_{x=0,a} = 0.$$

К уравнениям равновесия присоединим геометрические соотношения градиентной теории упругости:

$$e_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x},\ e_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial y},\ e_{12}=e_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\right), \qquad (6)$$

а также, физические соотношения упругости градиентной теории упругости:

$$\sigma_{11}=(\lambda+2\mu)\left[e_{11}-l^2\left(\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial y^2}\right)\right]+\lambda\left[e_{22}-l^2\left(\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial y^2}\right)\right],$$

$$\sigma_{22}=(\lambda+2\mu)\left[e_{22}-l^2\left(\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial y^2}\right)\right]+\lambda\left[e_{11}-l^2\left(\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial y^2}\right)\right], \qquad (7)$$

$$\sigma_{12}=\sigma_{21}=2\mu\left[e_{12}-l^2\left(\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial y^2}\right)\right],$$

где u_1, u_2 – перемещения, $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}=\sigma_{21}$ – напряжения.

2. Вывод основных соотношений изгибной деформаций тонких стержней по градиентной теории упругости вариационным путем.

Будем вводить следующие безразмерные величины:

$$\frac{\lambda}{E}=\bar{\lambda},\quad \frac{\mu}{E}=\bar{\mu},\quad \xi=\frac{x}{a},\quad \zeta=\frac{y}{h},\quad \left(\frac{l}{a}\right)^2=\varepsilon^2 l_*^2,\quad l_*\sim 1,$$

$$\tilde{q}_1^{\,*}=\frac{\tilde{q}_1}{E},\quad \tilde{P}_1^{\,*}=\frac{\tilde{P}_1}{E}(1\to 2),\quad \varepsilon=\frac{h}{a},\quad \bar{u}_1=\frac{u_1}{a},\quad \bar{u}_2=\frac{u_2}{a}. \qquad (8)$$

Тогда вариационное уравнение можем представить в виде:

$$\delta\int_0^1\int_{-1}^1 \overline{W}\,d\xi d\zeta=\left[\varepsilon^{-1}\int_0^1 \tilde{q}_1^{\,*}\delta u_1 d\xi+\varepsilon^{-1}\int_0^1 \tilde{q}_2^{\,*}\delta u_2 d\xi\right]_{\zeta=-1}^{\zeta=+1}+$$

$$+\left[\int_{-1}^1 \tilde{p}_1^{\,*}\delta\bar{u}_1 d\xi-\int_{-1}^1 \tilde{p}_2^{\,*}\delta\bar{u}_2 d\xi\right]_{\zeta=0}^{\zeta=1}, \qquad (9)$$

где

$$\overline{W} = \frac{1}{2}\overline{\lambda}\left(e_{11} + e_{22}\right)^2 + \overline{\mu}\left(e_{11}^2 + e_{22}^2 + 2e_{12}^2\right) +$$

$$+ \varepsilon^2 l_*^2 \left\{ \frac{1}{2}\overline{\lambda}\left[\left(\frac{\partial e_{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial e_{22}}{\partial \xi}\right)^2 + \varepsilon^{-2}\left(\frac{\partial e_{11}}{\partial \zeta} + \frac{\partial e_{22}}{\partial \zeta}\right)^2\right] + \right.$$

$$+ \overline{\mu}\left[\left(\frac{\partial e_{11}}{\partial \xi}\right)^2 + \varepsilon^{-2}\left(\frac{\partial e_{11}}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial e_{22}}{\partial \xi}\right)^2 + \varepsilon^{-2}\left(\frac{\partial e_{22}}{\partial \zeta}\right)^2 + \right. \tag{10}$$

$$\left.\left. + 2\left(\frac{\partial e_{12}}{\partial \xi}\right)^2 + 2\varepsilon^{-2}\left(\frac{\partial e_{12}}{\partial \zeta}\right)^2\right]\right\}.$$

При изгибе тонкого прямоугольника по градиентной теории упругости перемещения u_1 и u_2 имеют асимптотические разложения вида [6]:

$$u_1 = \varepsilon^{-2}\sum \varepsilon^s u_1^{(s)}, \quad u_2 = \varepsilon^{-2}\sum \varepsilon^s u_2^{(s)}. \tag{11}$$

$$e_{11} = \varepsilon^{-2}\sum \varepsilon^s e_{11}^{(s)}, \quad e_{12} = \varepsilon^{-3}\sum \varepsilon^s e_{12}^{(s)}, \quad e_{22} = \varepsilon^{-4}\sum \varepsilon^s e_{22}^{(s)}, \tag{12}$$

$$e_{11}^{(s)} = \frac{\partial u_1^{(s)}}{\partial \xi}, \quad e_{12}^{(s)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1^{(s)}}{\partial \zeta}\right), \quad e_{22}^{(s)} = \frac{\partial u_2^{(s)}}{\partial \zeta}, \tag{13}$$

$$\overline{\sigma}_{11} = \varepsilon^{-4}\sum \varepsilon^s \sigma_{11}^{(s)}, \quad \overline{\sigma}_{12} = \varepsilon^{-3}\sum \varepsilon^s \sigma_{12}^{(s)}, \quad \overline{\sigma}_{22} = \varepsilon^{-4}\sum \varepsilon^s \sigma_{22}^{(s)}, \tag{14}$$

$$\sigma_{11}^{(s)} = \left(\overline{\lambda} + 2\overline{\mu}\right)e_{11}^{(s-2)} + \overline{\lambda}\left(e_{22}^{(s)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(s)}}{\partial \zeta^2}\right) - \left(\overline{\lambda} + 2\overline{\mu}\right)l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(s-2)}}{\partial \zeta^2} -$$

$$- \overline{\lambda}\, l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(s-2)}}{\partial \xi^2} - \left(\overline{\lambda} + 2\overline{\mu}\right)l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(s-4)}}{\partial \xi^2}, \tag{15}$$

$$\sigma_{12}^{(s)} = 2\overline{\mu}e_{12}^{(s)} - 2\overline{\mu}l_*^2 \frac{\partial^2 e_{12}^{(s-2)}}{\partial \xi^2} - 2\overline{\mu}l_*^2 \frac{\partial^2 e_{12}^{(s)}}{\partial \zeta^2}, \tag{16}$$

$$\sigma_{22}^{(s)} = \left(\overline{\lambda} + 2\overline{\mu}\right)\left(e_{22}^{(s)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(s)}}{\partial \zeta^2}\right) + \overline{\lambda}\left(e_{11}^{(s-2)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(s-2)}}{\partial \zeta^2}\right) -$$

$$- \left(\overline{\lambda} + 2\overline{\mu}\right)l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(s-2)}}{\partial \xi^2} - \overline{\lambda}\, l_*^2 \frac{\partial^2 e_{11}^{(s-4)}}{\partial \xi^2}. \tag{17}$$

Подставим (12) в (10), для интенсивности потенциальной энергии деформации в исходном асимптотическом приближении получим формулу:

$$\overline{W} = \left(\frac{1}{2}\overline{\lambda} + \overline{\mu}\right)\left[\left(e_{22}^{(0)}\right)^2 + l_*^2\left(\frac{\partial e_{22}^{(0)}}{\partial \zeta}\right)^2\right]. \tag{18}$$

Вариационное уравнение (9) в исходном асимптотическом приближении примет вид:

$$\delta \int_0^1 \int_{-1}^1 \overline{W}\, d\xi d\zeta = 0. \tag{19}$$

Используя (13)₃, при $s = 0$, вариационное уравнение (19) можем записать так:

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 \left\{\left(\frac{\partial e_{22}^{(0)}}{\partial \zeta} - l_*^2 \frac{\partial^3 e_{22}^{(0)}}{\partial \zeta^3}\right)\delta u_2^{(0)} - \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\left(e_{22}^{(0)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(0)}}{\partial \zeta^2}\right)\delta u_2^{(0)}\right] - \right.$$

$$\left. - l_*^2 \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial e_{22}^{(0)}}{\partial \zeta}\frac{\partial \delta u_2^{(0)}}{\partial \zeta}\right)\right\} d\xi d\zeta = 0. \tag{20}$$

Из вариационного уравнения получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial e_{22}^{(0)}}{\partial \zeta} - l_*^2 \frac{\partial^3 e_{22}^{(0)}}{\partial \zeta^3} = 0, \tag{21}$$

и граничные условия при $\zeta = -1,\ \zeta = +1$:

$$e_{22}^{(0)} - l_*^2 \frac{\partial^2 e_{22}^{(0)}}{\partial \zeta^2} = 0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial e_{22}^{(0)}}{\partial \zeta} = 0. \tag{23}$$

С учетом граничных условий (22), (23), для решения дифференциального уравнения (21) будем иметь

$$e_{22}^{(0)} = 0, \text{ когда } 0 \le \xi \le 1, \quad -1 \le \zeta \le 1. \tag{24}$$

Используя выражение интенсивности потенциальной энергии деформации в следующем асимптотическом приближении, а также, в этом же приближении вариационное уравнение (9), из вытекающего дифференциального уравнения и граничных условий при $\xi = -1, \zeta = +1$, аналогично получим

$$e_{12}^{(0)} \equiv 0, \text{ когда } 0 \le \xi \le 1, \quad -1 \le \zeta \le 1. \tag{25}$$

Имея в виду (13)₃ и (13)₂, из (24) и (25) получим

$$\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial \zeta} = 0, \text{т.е.}\, u_2^{(0)} = \overset{0}{u}{}_2^{(0)}(\xi), \tag{26}$$

$$\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial \zeta} = 0, \text{т.е.}\, u_1^{(0)} = -\zeta\, \frac{d\overset{0}{u}{}_2^{(0)}(\xi)}{d\xi}. \tag{27}$$

Из (26) и (27) следует, что в прикладной модели тонких стержней при деформации изгиба по градиентной теории упругости имеет место гипотеза нормали, т. е. гипотеза Бернули-Эйлера (одномерная гипотеза Кирхгофа).

Для деформации $e_{11}^{(0)}$, используя $(13)_1$ и (27), будем иметь

$$e_{11}^{(0)} = \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial \xi},\ \text{т.е.}\ e_{11}^{(0)} = -\zeta\, \frac{d^2 \overset{0}{u}{}_2^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^2}. \tag{28}$$

Используя следующее асимптотическое приближение, из вариационного уравнения (9) получим дифференциальные уравнения равновесия и соответствующие естественные граничные условия прикладной модели тонкого стержня при изгибе по градиентной теории упругости.

Заключение. Из построенного вариационного уравнения плоской задач градиентной теории упругости [5], применением асимптотического метода сингулярного возмущения с энергетическим подходом, для каждого приближения асимптотического метода построено вариационное уравнение соответствующего приближения, при помощи которого обосновываются классические гипотезы построения моделей тонких стержней и одновременно устанавливается прикладная модель изгиба тонкого стержня по градиентной теории упругости.

ԳՐԱԴԻԵՆՏ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՄԲ ԲԱՐԱԿ ՁՈՂԵՐԻ ԾՌՄԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՅԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՄԱՆ ՎԱՐԻԱՑԻՈՆ ՄՈՏԵՑՈՒՄԸ

Սարգսյան Լ. Ս.

Աշխատանքում բերվում է գրադիենտ առաձգականության տեսության հարթ խնդրի վարիացիոն հավասարումը ուղղանկյան բարակ տիրույթի դեպքում և կիրառելով ասիմպտոտիկ մեթոդը՝ ստացվել են առաձգական բարակ ձողի ծռման մոդելի հիմնական կինեմատիկական բնութագրերը, որոնք կարելի է ձևակերպել որպես վարկածներ։

Բանալի բառեր. վարիացիոն սկզբունք, բարակ ձողի ծռման կիրառական մոդել, առաձգականության գրադիենտային տեսություն:

VARIATIONAL APPROACH TO THE STUDY OF BENDING DEFORMATION OF THIN BEAMS ACCORDING TO THE GRADIENT THEORY OF ELASTICITY

Sargsyan L. S.

In the paper the variational principle of the plane problem of the gradient theory of elasticity is given and, using the asymptotic method, the basic kinematic relations (which can be formulated as hypotheses) of the bending model of elastic thin bending are obtained.

Keywords: variational approach, applied model of bending of a thin beam, gradient theory of elasticity.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розин Л. А. Вариационные постановки задач для упругих систем. Л.: Изд-во Ленинградского университета. 1978. 224 с.
2. Розин Л. А. Теоремы и методы статики деформируемых систем. Л.: Изд-во Ленинградского университета. 1986. 276 с.
3. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.:Мир. 1987. 542 с.
4. Alten B. S., Aifantis E. C. On some Aspects in the Special Theory of Gradient Elasticity//Journal of Mechanical Behavior of Materials. 1997. Vol. 8. P. 231-282.
5. Саркисян Л. С. Основные уравнения, граничные условия и вариационный принцип плоской задачи градиентной теории упругости для прямоугольной области//Ученые записки Ширакского государственного университета. 2021. N1. Часть А. В печати.
6. Саркисян Л. С., Саркисян С. О. Асимптотический подход построения прикладной модели деформаций тонких стержней по градиентной теории упругости//Известия НАН Армении. Механика. 2020. Том. 73. N 1. С. 63-71.

Сведения об авторе

Саркисян Л. С. *- кандидат физ.-мат. наук, доцент*

Институт механики НАН Армении

Эл. почта: slusin@yahoo.com

Поступила в редакцию 01.10.2021

Прошла рецензию 18.12.2021