

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГОСТИ СТАТИЧЕСКОЙ
ДЕФОРМАЦИИ МИКРОПОЛЯРНОГО СТЕРЖНЯ С КРУГОВОЙ ОСЬЮ
ПО ТЕОРИИ СО СТЕСНЕННЫМ ВРАЩЕНИЕМ И МЕТОД КОНЕЧНЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ**

Саркисян С. О., Хачатрян М. В.

В работе на основе ранее разработанной системы гипотез построена прикладная модель термоупругости микрополярных тонких стержней с круговой осью со стесненным вращением. Доказаны энергетические теоремы и установлен вариационный принцип типа Лагранжа.

Для решения граничных задач прикладной модели термоупругости микрополярных тонких стержней с круговой осью со стесненным вращением, рассматриваются пути построения аналитических решений, а также разрабатывается вариант метода конечных элементов.

На основе численных результатов и параметрического анализа задач устанавливается, что учет микрополярных свойств материала при остальных равных условиях повышает жесткость стержней по сравнению с классическим случаем.

Ключевые слова: микрополярная термоупругость, стесненное вращение, тонкий стержень, круговая ось, прикладная модель, метод конечных элементов.

Введение. В современных силовых конструкциях находят широкое применение упругие тонкие стержни с круговой осью. Построению прикладных моделей тонких стержней с круговой осью на основе классической теории упругости посвящено большое число работ [1]. В работе [2] изучена задача изгиба упругого стержня с круговой осью в постановке моментной теории упругости со стесненным вращением на основе гипотезы плоского сечения.

Термомеханика деформируемого твердого тела [3,4], как на основе классической теории упругости, так и на основе микрополярной теории упругости, получила широкое развитие в связи с применением новых материалов и технологий в современной технике. В связи с этим, возрос большой интерес к исследованиям проблем термоупругих процессов в прямолинейных и криволинейных тонких стержнях, пластинках и оболочках [5-8].

Следует отметить, что разработка и применение численных методов для решения сложных граничных задач прямолинейных и круговых тонких стержней, пластин и оболочек имеет весьма важное значение для приложений. В настоящее время в практике расчетов на прочность и жесткость выше приведенных тонкостенных элементов конструкций, как в постановке классической теории упругости и термоупругости, так и в постановке микрополярной теории упругости и термоупругости, находит широкое применение метод конечных элементов [9-13].

В данной работе на основе метода гипотез [14-16] (эти гипотезы характеризуют качественные стороны результата асимптотического метода интегрирования трехмерной или двумерной краевой задачи микрополярной теории упругости и термоупругости в тонких областях) построена прикладная (одномерная) модель микрополярной термоупругости тонкого стержня с круговой осью в квазистатической постановке; для этой модели установлен вариационный принцип типа Лагранжа (принцип возможных перемещений) и разработан вариант применения метода конечных элементов для решения граничных задач этой модели. Приведены результаты исследований одной характерной задачи для температурного изгиба микрополярных (со стесненным вращением) упругих тонких стержней с круговой осью. Сравняется полученное решение с соответствующим решением классической модели. Устанавливается явление (повышенный уровень жесткости), которое вносит учет микрополярных свойств материала в его напряженно-деформированное состояние.

1. Вывод основной системы уравнений микрополярного термоупругого стержня с круговой осью со стесненным вращением. Рассмотрим пространственный круговой сектор (рис.1), имеющий постоянное поперечное сечение высотой $2h = r_2 - r_1$ и шириной b , настолько малой, что задача об изгибе этого тела можем рассматривать как плоская (т.е., считая, что имеет место обобщенное плоское

напряженное состояние). Ось данного тела - дуга окружности радиуса r_0 ; материал его - изотропный, микрополярно-упругий.

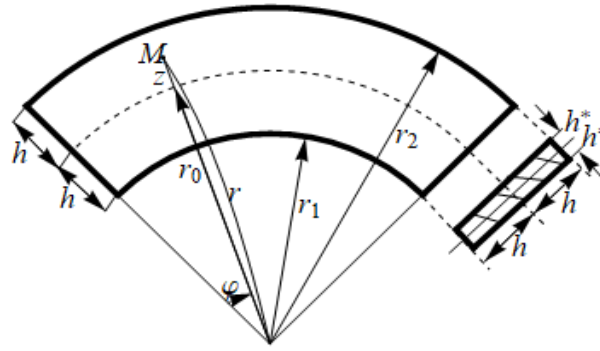


Рис.1

В срединной плоскости кругового сектора будем вводить полярную систему координат (r, φ) : $r_1 \leq r \leq r_2, 0 \leq \varphi \leq \varphi_1$, основные уравнения обобщенного плоского напряженного состояния микрополярной термоупругости со стесненным вращением будут [4]:

Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{21} + \sigma_{12}) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{22} - \sigma_{11}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \mu_{13}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial r} + \frac{1}{r} \mu_{23} + \sigma_{12} - \sigma_{21} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Соотношения термоупругости:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}] + \alpha_i T, \quad \gamma_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}] + \alpha_i T, \\ \tilde{\gamma}_{12} = \gamma_{12} + \gamma_{21} = \frac{1}{2\mu} (\sigma_{12} + \sigma_{21}), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\chi_{13} = \frac{1}{B} \mu_{13}, \quad \chi_{23} = \frac{1}{B} \mu_{23}.$$

Геометрические соотношения:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} V_2, \quad \gamma_{22} = \frac{\partial V_2}{\partial r}, \quad \gamma_{12} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} V_1 - \omega_3, \quad \gamma_{21} = \frac{\partial V_1}{\partial r} + \omega_3, \\ \chi_{13} = \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_3}{\partial \varphi}, \quad \chi_{23} = \frac{\partial \omega_3}{\partial r}, \quad \omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_1}{\partial r} - \frac{1}{r} V_1 \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение стационарной теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (4)$$

Здесь $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}$ - силовые (обычные) напряжения; μ_{13}, μ_{23} - моментные напряжения; $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{12}, \gamma_{21}$ - деформации; χ_{13}, χ_{23} - изгиб-кручения; V_1, V_2 - перемещения; ω_3 - свободный поворот; $E, \nu, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, α, B - упругие постоянные микрополярного материала $\left(\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \right)$, T - функция температуры.

Будем считать, что на лицевых линиях $r = r_1, r = r_2$ заданы внешние усилия и моменты:

$$\sigma_{21} = q_1^-, \sigma_{22} = q_2^-; \mu_{23} = m^-, \text{ на } r = r_1, \quad (5)$$

$$\sigma_{21} = q_1^+, \sigma_{22} = q_2^+; \mu_{23} = m^+, \text{ на } r = r_2,$$

а на крайних сечениях области ($\varphi = 0, \varphi = \varphi_1$) могут иметь место граничные условия различных вариантов (свободный край, защемлений край, шарнирно опертый край), а для задачи теплопроводности будем считать, что заданы значения температурной функции на всех сторонах данной области.

Отметим, что поставленную краевую задачу будем рассматривать как квазистатическую задачу микрополярной термоупругости со стесненным вращением.

Плотность потенциальной энергии деформаций плоского напряженного состояния статической термоупругости микрополярного изотропного тела со стесненным вращением имеет вид:

$$W = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \gamma_{11}^2 + \frac{E\nu}{1-\nu^2} \gamma_{11}\gamma_{22} + \frac{E}{2(1-\nu^2)} \gamma_{22}^2 + \frac{\mu}{2} \tilde{\gamma}_{12}^2 + \frac{1}{2} B \chi_{13}^2 + \frac{1}{2} B \chi_{23}^2 + \frac{\alpha T}{2} \frac{E}{1-\nu} (\gamma_{11} + \gamma_{22}). \quad (6)$$

Для построения прикладной модели микрополярного термоупругого тонкого стержня с круговой осью со стесненным вращением за основу будем принимать гипотезы, которые изложены в работах [14-16].

Таким образом получим:

$$V_1 = u(\varphi) + z\psi(\varphi), \quad V_2 = w(\varphi), \quad (7)$$

где $u(\varphi)$ и $w(\varphi)$ - перемещения точек средней линии в направлениях по ее касательной и по нормали (т.е. $w(\varphi)$ - это прогиб стержня); $\psi(\varphi)$ - угол поворота первоначально нормального элемента.

Для поворота точек срединной плоскости вокруг оси перпендикулярной к срединной плоскости получим:

$$\omega_3 = \Omega_3(\varphi) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_0} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0} u - \psi \right). \quad (8)$$

Для деформаций, изгибов – кручений будем иметь

$$\gamma_{11} = \Gamma_{11} + zK_{11}, \gamma_{22} = 0, \tilde{\gamma}_{12} = \tilde{\Gamma}_{12}, \chi_{13} = k_{13}, \chi_{23} = 0, \quad (9)$$

где

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r_0} w, \quad \tilde{\Gamma}_{12} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{1}{r_0} u + \psi, \quad (10)$$

$$K_{11} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad k_{13} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \varphi}.$$

Здесь Γ_{11} -представляет собой продольную относительную деформацию средней линии; K_{11} -изменение кривизны средней линии (от силовых напряжений); $\tilde{\Gamma}_{12}$ - сдвиговая деформация; k_{13} - изменение кривизны средней линии (от моментных напряжений).

Для напряжений и моментных напряжений получим следующие выражения:

$$\sigma_{11}^0 = \sigma_{11}^1 + z \sigma_{11}^2 - E \alpha_t T, \quad (11)$$

где

$$\sigma_{11}^0 = E \Gamma_{11}^0, \quad \sigma_{11}^1 = E K_{11}^1; \quad (12)$$

$$\sigma_{12}^0 + \sigma_{21}^0 = 2 \mu \tilde{\Gamma}_{12}^0; \quad (13)$$

$$\mu_{13}^0 = B k_{13}^0; \quad (14)$$

$$\sigma_{22}^0 = \frac{1}{2} (q_2^+ + q_2^-) - \frac{h^2}{2} \frac{1}{r_0} \sigma_{11}^1 + z \left(\frac{1}{r_0} \sigma_{11}^0 - \frac{1}{r_0} \frac{d \sigma_{12}^0}{d \varphi} \right) + \frac{1}{r_0} \sigma_{11}^1 \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2 r_0} E \alpha_t \int_{-h}^z T dz; \quad (15)$$

$$\mu_{23}^0 = \frac{1}{2} (m^+ + m^-) - z \left(\frac{1}{r_0} \frac{d \mu_{13}^0}{d \varphi} + \sigma_{12}^0 - \sigma_{21}^0 \right); \quad (16)$$

$$\sigma_{21}^0 = \sigma_{21}^1(\varphi) + \frac{h^2}{6} \frac{1}{r_0} \frac{d \sigma_{11}^1}{d \varphi} - z \left(\frac{1}{r_0} \frac{d \sigma_{11}^0}{d \varphi} + \frac{1}{r_0} \sigma_{12}^0 \right) - \frac{z^2}{2} \frac{1}{r_0} \frac{d \sigma_{11}^1}{d \varphi} +$$

$$+ \frac{1}{r_0} E \alpha_t \frac{d}{d\varphi} \left(\int_{-h}^z T dz \right). \quad (17)$$

Будем вводить статически эквивалентные напряжения и моментные напряжения интегральных характеристик-усилия: N , Q_1 , Q_2 и моменты: M_{11} , L_{13} , которые выражаются следующими формулами:

$$N = \int_{-h}^h \sigma_{11} dz, \quad Q_1 = \int_{-h}^h \sigma_{12} dz, \quad Q_2 = \int_{-h}^h \sigma_{21} dz, \quad M_{11} = \int_{-h}^h \sigma_{11} z dz, \\ L_{13} = \int_{-h}^h \mu_{13} dz. \quad (18)$$

Теперь будем принимать за основу формулы для σ_{21} ((17)), σ_{22} ((15)) и μ_{23} ((16)), удовлетворяя граничные условия (5); с учетом формулы (18), приходим к системе уравнений равновесия прикладной модели термоупругости микрополярного стержня с круговой осью со стесненным вращением.

Уравнения равновесия:

$$\frac{1}{r_0} N - \frac{1}{r_0} \frac{dQ_1}{d\varphi} = q_2^+ - q_2^-, \quad \frac{1}{r_0} Q_1 + \frac{1}{r_0} \frac{dN}{d\varphi} = -(q_1^+ - q_1^-) \\ Q_2 - \frac{1}{r_0} \frac{dM_{11}}{d\varphi} = h(q_1^+ + q_1^-), \quad Q_2 - Q_1 - \frac{1}{r_0} \frac{dL_{13}}{d\varphi} = m^+ - m^-. \quad (19)$$

Из соотношений (11), (13), (14) получим упругий закон между интегральными характеристиками и деформациями:

$$N = E (2h\Gamma_{11} - \alpha_t T^*), \quad Q_1 + Q_2 = 4h\mu \tilde{\Gamma}_{12}, \\ M_{11} = E \left(\frac{2h^3}{3} K_{11} - \alpha_t T^{**} \right), \quad L_{13} = 2Bhk_{13}. \quad (20)$$

$$\text{где } T^* = \int_{-h}^h T dz, \quad T^{**} = \int_{-h}^h T z dz.$$

Присоединим и уравнениям равновесия (19), соотношениям упругости (20), также геометрические соотношения (10):

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{r_0} \frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{r_0} w, \quad \tilde{\Gamma}_{12} = \frac{1}{r_0} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0} u + \psi, \\ K_{11} = \frac{1}{r_0} \frac{d\psi}{d\varphi}, \quad k_{13} = \frac{1}{r_0} \frac{d\Omega_3}{d\varphi}, \quad \Omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_0} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0} u - \psi \right). \quad (21)$$

Уравнения равновесия (19), соотношения упругости (20) и геометрические соотношения (21) представляют собой основные уравнения прикладной модели термоупругой изгибной деформации микрополярных тонких стержней с круговой осью со стесненным вращением.

К этой системе уравнений следует присоединить граничные условия (например, для граничного сечения $\varphi = 0$):

а) когда заданы усилия и момент:

$$N \Big|_{\varphi=0} = N', \quad Q_1 \Big|_{\varphi=0} = Q_1', \quad M_{11} \Big|_{\varphi=0} = M_{11}', \quad L_{13} \Big|_{\varphi=0} = L_{13}' ; \quad (22)$$

б) когда граничное сечение жестко заделано:

$$u \Big|_{\varphi=0} = 0, \quad w \Big|_{\varphi=0} = 0, \quad \psi \Big|_{\varphi=0} = 0, \quad \Omega_3 \Big|_{\varphi=0} = 0 ; \quad (23)$$

в) когда граничное сечение шарнирно оперто:

$$N \Big|_{\varphi=0} = 0, \quad w \Big|_{\varphi=0} = 0, \quad M_{11} \Big|_{\varphi=0} = 0, \quad L_{13} \Big|_{\varphi=0} = 0 . \quad (24)$$

Плотность потенциальной энергии деформации прикладной модели изгибной термоупругой деформации микрополярных стержней с круговой осью со стесненным вращением будет принимать вид:

$$W_0 = Eh\Gamma_{11}^2 + \frac{Eh^3}{3} K_{11}^2 + h\mu\tilde{\Gamma}_{12}^2 + Bhk_{13}^2 - E\Gamma_{11}\alpha_i T^* - EK_{11}\alpha_i T^{**} . \quad (25)$$

Для построенной модели изгибной деформации микрополярной со стесненным вращением упругого тонкого стержня можно доказать все энергетические теоремы.

Общий вид функционала полной потенциальной энергии деформации (потенциальная энергия деформации стержня плюс потенциал внешних усилий) при прикладном плоском изгибе упругого стержня с круговой осью со стесненным вращением будет выражаться так:

$$U = \int_0^a (W_0 - 2hq_2\psi - 2qw - 2q_1u - 2m\Omega_3) ds - \\ - ((Q_{12}w + Nu + M_{11}\psi + L_{13}\Omega_3) \Big|_{s=a} - (Q_{12}w + Nu + M_{11}\psi + L_{13}\Omega_3) \Big|_{s=0}), \quad (26)$$

где введены следующие обозначения: $q = \frac{1}{2}(q_2^+ - q_2^-)$, $q_1 = \frac{1}{2}(q_1^+ - q_1^-)$,

$q_2 = \frac{1}{2}(q_1^+ + q_1^-)$, a - длина средней линии стержня.

Имеет место вариационный принцип типа Лагранжа (принцип возможных перемещений):

$$\begin{aligned} \delta U = & \delta \left(\int_0^a W_0 ds \right) - \int_0^a (2hq_2 \delta \psi + 2q \delta w + 2q_1 \delta u + 2m \delta \Omega_3) ds - \\ & - (Q_{12} \delta w + N \delta u + M_{11} \delta \psi + L_{13} \delta \Omega_3) \Big|_{s=a} + \\ & + (Q_{12} \delta w + N \delta u + M_{11} \delta \psi + L_{13} \delta \Omega_3) \Big|_{s=0} = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Известным способом можно показать, что полная потенциальная энергия, которая принимает стационарное значение ((27)), это будет минимум для выражения (26).

Если в системе уравнений (20) принимать $B = 0$, получим, что $L_{13} = 0$, а также, считая, что $m^+ = m^- = 0$, из (19)₄ получим $Q_1 = Q_2$. Таким образом, в этом частном случае получим классическую модель упругого тонкого стержня с круговой осью с учетом деформаций поперечного сдвига.

2. Разработка варианта метода конечных элементов (МКЭ) для решения граничных задач термоупругости микрополярных тонких стержней с круговой осью со стесненным вращением. Рассмотрим вывод матрицы жесткости конечного элемента микрополярных стержней с круговой осью со стесненным вращением. Основные кинематические параметры: прогиб - $\bar{w}(\bar{s})$, осевое перемещение - $\bar{u}(\bar{s})$ и угол поворота нормального элемента - $\bar{\psi}(\bar{s})$, будем аппроксимировать полиномами:

$$\begin{aligned} \bar{w}(\bar{s}) = & \alpha_1 + \alpha_2 \bar{s} + \alpha_3 \bar{s}^2 + \alpha_4 \bar{s}^3, \quad \bar{u}(\bar{s}) = \alpha_5 + \alpha_6 \bar{s} + \alpha_7 \bar{s}^2 + \alpha_8 \bar{s}^3, \\ \bar{\psi}(\bar{s}) = & \alpha_9 + \alpha_{10} \bar{s} + \alpha_{11} \bar{s}^2 + \alpha_{12} \bar{s}^3, \quad \bar{s} = \bar{r}_0 \varphi, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\text{где } \bar{w} = \frac{w}{a}, \bar{u} = \frac{u}{a}, \bar{s} = \frac{s}{a}, \bar{r}_0 = \frac{r_0}{a}.$$

Здесь $\alpha_i, i = 1, 2 \dots 12$ - коэффициенты, которые ниже будем выражать через узловые перемещения и повороты. Для узловых перемещений и поворотов примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} w(0) = & \delta_1, \quad w'(0) = \delta_2, \quad u(0) = \delta_3, \quad u'(0) = \delta_4, \\ \psi(0) = & \delta_5, \quad \psi'(0) = \delta_6, \quad w(1) = \delta_7, \quad w'(1) = \delta_8, \\ u(1) = & \delta_9, \quad u'(1) = \delta_{10}, \quad \psi(1) = \delta_{11}, \quad \psi'(1) = \delta_{12}. \end{aligned} \quad (29)$$

Как видим, данный конечный элемент имеет двенадцать степеней свободы.

Подчиняя (28) условиям (29), выразим коэффициенты $\alpha_i, i = 1, 2 \dots 12$ через узловые перемещения и повороты δ_k . Подставив, таким образом, определенные $\alpha_i, i = 1, 2 \dots 12$ в (26), получим для перемещений и

поворотов представления:

$$\bar{w}(\bar{s}) = \sum_{i=1,2,7,8} \delta_i N_i(\bar{s}), \quad \bar{u}(\bar{s}) = \sum_{i=3,4,9,10} \delta_i N_i(\bar{s}), \quad \psi(\bar{s}) = \sum_{i=5,6,11,12} \delta_i N_i(\bar{s}), \quad (30)$$

где $N_i(\bar{s})$ функции формы элемента:

$$\begin{aligned} N_1 = N_3 = N_5 = 1 - 3\bar{s}^2 + 2\bar{s}^3, \quad N_2 = N_4 = N_6 = \bar{s} - 2\bar{s}^2 + \bar{s}^3, \\ N_7 = N_9 = N_{11} = 3\bar{s}^2 - 2\bar{s}^3, \quad N_8 = N_{10} = N_{12} = -\bar{s}^2 + \bar{s}^3. \end{aligned} \quad (31)$$

Далее, подставив (30) в функционал (26), где Ω_3 - выражается формулой (8), а \bar{W}_0 имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{W}_0 = 2(1+\nu)\Gamma_{11}^2 + \frac{2(1+\nu)\delta^2}{3}K_{11}^2 + \tilde{\Gamma}_{12}^2 + B^*k_{13}^2 - \\ - 2(1+\nu)\Gamma_{11}\alpha_i T^* - 2(1+\nu)K_{11}\alpha_i T^{**}, \end{aligned} \quad (32)$$

после выполнения интегрирования получим функцию от двенадцати независимых переменных $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \dots, \delta_{12}$. Минимизация функционала (26) приводит к нахождению минимума функции двенадцати независимых переменных. Вычислив соответствующие частные производные, обращая их в ноль, приходим к следующему матричному уравнению:

$$[K] \cdot \{\delta\} = [P]. \quad (33)$$

Здесь K - матрица жесткости элемента размером 12×12 ; $\{\delta\}^T = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \dots, \delta_{12})$ - вектор узловых перемещений и поворотов; $\{P\}$ - вектор узловых нагрузок, где в случае термоупругости входят также температурные члены.

3. Задача термоупругого изгиба микрополярных упругих стержней с круговой осью со стесненным вращением. В качестве приложений для построенной модели микрополярных термоупругих стержней с круговой осью со стесненным вращением ((19), (20), (21)) рассмотрим задачу термоупругого изгиба стержня, когда нижний конец жестко защемлен, а верхний шарнирно оперт (рис.2), под воздействием только температуры (внешние усилия отсутствуют).

Граничные условия для этой задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{при } \bar{s} = 0, \quad \bar{w} = 0, \quad \bar{u} = 0, \quad \psi = 0, \quad \Omega_3 = 0; \\ \text{при } \bar{s} = 1 = \frac{\pi r_0}{2}, \quad \bar{w} = 0, \quad \bar{N} = 0, \quad \bar{M}_{11} = 0, \quad \bar{L}_{13} = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

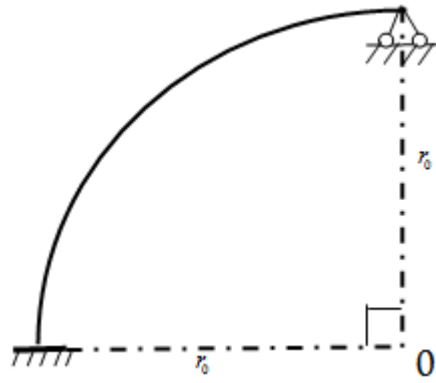


Рис.2

Для определения температурного поля в круговом секторе (рис.1), будем решать уравнение теплопроводности (4) со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned}
 T(\bar{s}, \bar{z})|_{\bar{z}=h} &= T^+(\bar{s}), & T(\bar{s}, \bar{z})|_{\bar{z}=-h} &= T^-(\bar{s}), \\
 T(\bar{s}, \bar{z})|_{\bar{s}=0} &= 0, & T(\bar{s}, \bar{z})|_{\bar{s}=1} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

где

$$T^+(\bar{s}) = -4T_0^+ \bar{s}(\bar{s}-1), \quad T^-(\bar{s}) = -4T_0^- \bar{s}(\bar{s}-1).
 \tag{36}$$

Решение краевой задачи (4), (35) построено с помощью метода разделения переменных.

Подставленную задачу можно решать и аналитическим путем (в виду громозкости, подробности пропускаем) и при помощи разработанного варианта МКЭ. Вектор узловых нагрузок, где входят температурные члены, определенный вектор столбец.

Численные результаты получены для следующих значений параметров задачи:

$$\begin{aligned}
 \delta &= 1/40, \quad \nu = 0.28, \quad \bar{r}_0 = 0.64, \\
 (T_0^+ + T_0^-) \cdot \alpha_i &= 1.87 \times 10^{-3}, \quad (T_0^+ - T_0^-) \cdot \alpha_i = 0.37 \times 10^{-3}.
 \end{aligned}$$

Для сравнения приведены также результаты численного счета для классического упругого тонкого стержня с круговой осью.

В табл.1 приведены значения максимального безразмерного прогиба микрополярного стержня с круговой осью со стесненным вращением в зависимости от значения безразмерного физического параметра V^* .

Приведенные данные в таблице 1 свидетельствуют о том, что при возрастании безразмерной упругой постоянной V^* , жесткость

микрополярного стержня возрастает по сравнению с классическим случаем.

Таблица 1.

Прогибы микрополярного со стесненным вращением тонкого стержня с круговой осью в зависимости от B^* , а также максимальное значение прогиба в случае классического стержня под действием температуры

B^*	Микрополярная модель			Классическая модель		
	Точное значение	$\bar{w} \times 10^5$		Точное значение	$\bar{w} \times 10^5$	
		Количество конечных элементов	2		4	Количество конечных элементов
$1.91 \cdot 10^{-7}$	24.64	24.45	24.64	24.64	24.47	24.65
$1.91 \cdot 10^{-5}$	23.59	23.48	23.59	-	-	-
$1.91 \cdot 10^{-4}$	16.56	16.88	16.57	-	-	-
$1.91 \cdot 0.5 \cdot 10^{-3}$	4.94	5.43	4.96	-	-	-

Заключение. В работе построена прикладная модель микрополярной термоупругости (со стесненным вращением) тонкого стержня с круговой осью; для решения граничных задач этой модели установлен вариационный принцип типа Лагранжа и разработан вариант метода конечных элементов. На основе изучения конкретной граничной задачи термостатики микрополярных (со стесненным вращением) упругих тонких стержней с круговой осью установлено, что учет микрополярных свойств материала стержня повышает его жесткость по сравнению с классическим случаем.

ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ԿՈՐՈՒԹՅԱՄԲ ԿԱՇԿԱՆԴՎԱԾ ՊՏՈՒՅՏՆԵՐՈՎ
ՄԻԿՐՈՊՈԼՅԱՐ ՁՈՂԻ ՋԵՐՄԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍՏԱՏԻԿ
ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՅԻ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՍՈՂԵԼԸ և ՎԵՐՋԱՎՈՐ
ՏԱՐԲԵՐԻ ՄԵԹՈՂԸ

Սարգսյան Ս. Հ., Խաչատրյան Մ. Վ.

Աշխատանքում նախապես մշակված վարկածների համակարգի հիման վրա կառուցվում է շրջանային կորությամբ, կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար բարակ ձողի ջերմաստիճանային կիրառական մոդելը: Ապացուցվում են էներգետիկ թեորեմները և հաստատվում համապատասխան վարիացիոն սկզբունքները:

Կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար ջերմաստաձգական շրջանային կորությամբ բարակ ձողի կիրառական մոդելի եզրային խնդիրները լուծելու համար դիտարկվում են անալիտիկ լուծման կառուցման ճանապարհները, ինչպես նաև մշակվում է վերջավոր տարրերի մեթոդի կիրառման տարբերակ:

Թվային արդյունքների հիման վրա և իրականացված պարամետրական անալիզի միջոցով հաստատվում է, որ նյութի միկրոպոլյար հատկությունների հաշվառումը մնացած բոլոր հավասար պայմանների դեպքում բարձրացնում է ձողի կոշտությունը՝ համեմատած դասական դեպքի հետ:

Բանալի բառեր. միկրոպոլյար ջերմաստաձգականություն, կաշկանդված պտույտներ, շրջանային կորությամբ բարակ ձող, կիրառական մոդել, վերջավոր տարրերի մեթոդ:

**MATHEMATICAL MODEL OF THERMOELASTICITY OF STATIC
DEFORMATION OF MICROPOLAR BEAM WITH A CIRCULAR AXIS ON
THE THEORY WITH CONSTRAINED ROTATION AND THE FINITE
ELEMENT METHOD**

Sargsyan S. H., Khachatryan M. V.

In the present paper on the basis of the previously developed hypotheses system the applied model of thermoelasticity of micropolar thin beams with a circular axis with constrained rotation is constructed. Energy theorems are proved and the corresponding variational principles are established.

To solve boundary-value problems of the applied model of thermoelasticity of micropolar thin beams with a circular axis with constrained rotation ways of construction of analytical solutions are considered as well as a version of the finite element method is developed.

On the basis of numerical results and parametric analysis of problems, it is established that the consideration of the micropolar properties of the material, in case of other equal conditions, increases the rigidity of the beams in comparison with the classical case.

Keywords: micropolar thermoelasticity, constrained rotation, thin beam, circular axis, applied model, finite element method.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21Т-2С093.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в трех томах. Под общей редакцией: И. А. Биргера, Я. Г. Пановко Т 1. М.: Изд-во "Машиностроение". 1968. 832 с.
2. Lakes R. S., Drugan W. J. Bending of a Cosserat Elastic Bar of Square Cross Section - Theory and Experiment// J. Appl. Mech. 82(9). 2015. P. 091002.
3. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир. 1964. 517 с.
4. Nowacki W., Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford. New York. Toronto. Sydney. Paris. Frankfurt. Pergamon Press. 1986. 383 p.
5. Тимошенко С. П. Соппротивление материалов. Том.1. М.: Наука. 1965. 364с.
6. Тимошенко С. П., Гере Дж. Механика материалов. С. Петербург-Москва: Изд-во "Лань". 2002. 672 с.
7. Коваленко А.Д. Термоупругость пластин и оболочек// Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. (Днепропетровск, 1969). М.: Наука, 1970. С. 813-819.
8. Мотовиловец И. А., Козлов В. И. Механика связанных полей в элементах конструкций. Том 1. Термоупругость. Киев: Наук. думка. 1987. 264с.
9. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. М.: Недра. 1974. 240с.
10. Кузьмин М. А., Лебедев Д. Л., Попов Б. Л. Решение задач механики методом конечных элементов. М.: Изд-во "Академкнига". 2008. 160 с.
11. Nakamura S., Benedict R. L., Lakes R. S. Finite Element Method for Orthotropic Micropolar Elasticity// Intern. J. Eng. Sci. 1984. V. 22. № 3. P. 319-330.
12. Жамакочян К. А., Саркисян С. О. Метод конечных элементов в расчетах на изгиб микрополярных упругих тонких пластин// Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9. № 3. С. 375-383.
13. Саркисян С. О., Хачатрян М. В. Построение модели изгиба микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью и ее реализация методом конечных элементов// Вычислительная механика сплошных сред. 2020. Т. 13. № 3. С. 256-268.

14. Sargsyan S. H. Mathematical Model of Micropolar Thermo-Elasticity of Thin Shells// Journal of Thermal Stresses. 2013. Vol. 36. № 11. P. 1200-1216.
15. Aslanyan N. S, Sargsyan S. H. Thermoelasticity of Micropolar thin Beams// Journal of Thermal Stresses. 2018. V. 41. № 6. P. 687-705.
16. Асланян Н. С., Саркисян С. О. Термоупругость микрополярных балок и пластин со стесненным вращением // Актуальные проблемы прочности. Монография. В 2-х томах. Том 1. Витебск, Беларусь: НАН Беларуси. Витебский гос. технологический ун-т. Глава 12. 2018. С. 210-234.

Сведения об авторах

Саркисян С. О. - член-корр. НАН Армении, доктор физ.-мат. наук, профессор

Ширакский государственный университет

Эл. почта: s_sargsyan@yahoo.com

Хачатрян М. В. – кандидат физ.-мат. наук, ассистент

Ширакский государственный университет

Эл. почта: khachatryanmeline@mail.ru

Поступила в редакцию 19.09.2021

Прошла рецензию 29.11.2021