ՇԻՐԱԿԻ Մ. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
ШИРАКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. НАЛБАНДЯНА
M. NALBANDYAN STATE UNIVERSITY OF SHIRAK
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ SCIENTIFIC PROCEEDINGS

Պրակ Ա
Выпуск А
Issue A

2021 № 1

УДК 539.3
DOI 10.54151/27382559-2021.1a-20

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ И ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Саркисян Л. С.

В работе приведены основные уравнения плоской задачи градиентной теории упругости для прямоугольной области и устанавливается принцип возможных перемещений с соответствующем вариационном уравнением. Из вариационного уравнения теории упругости и для прямоугольной области все граничные условия.

Ключевые слова: градиентная теория упругости, плоская задача, прямоугольная область, принцип возможных перемещений, основные уравнения, граничные условия.

Введение. Для построения моделей деформаций стержней (растяжения-сжатия и изгиба) по градиентной теории упругости, необходимо иметь уравнения плоской задачи, граничные условия и вариационные принципы этой теории.

В работе выведены основные уравнения, граничные условия и вариационный принцип возможных перемещений плоской задачи градиентной теории упругости для прямоугольной области.

В градиентной теории упругости имеются две основные формулировки. Первая формулировка градиентной теории упругости предложена Эрингеном [1], в которой по физическим соотношениям деформации зависят от напряжений и второго градиента напряжений. Другая формулировка градиентной теории упругости предложена Айфантисом [2-4], в которой, по физическим соотношениям, напряжения зависят от деформаций и второго градиента деформаций. Работы [4,5] посвящены изучению связи между моделями Эрингена и Айфантиса. Отметим, что в настоящее время градиентная теория упругости применяется в различных областях современной техники, например, в биомеханике [6] (см. также литературные источники, приведенные в этой статье). Далее будем рассматривать модель Айфантиса.

Построение моделей тонких стержней, пластин и оболочек как в классической теории упругости, так и в градиентной теории упругости, имеет актуальное значение с точки зрения приложений.

В работе [7] рассматривалась система основных уравнений плоской задачи градиентной теории упругости (без привлечения граничных условий этой теории) в тонкой прямоугольной области и применяя асимптотический метод, построены система уравнений прикладной модели тонких стержней для растяжения-сжатия и для задачи изгиба. Понятно, что для окончательного построения прикладной модели тонких стержней по градиентной теории упругости следует привлечь к вниманию конкретные граничные условия, которые имеются в этой теории, этим самым полученные уравнения в работе [7] дополнить членами с этой точки зрения и установить соответствующие граничные условия для прикладной модели.

Для этого в этой работе (т. к. в литературе их нет) изложены основные уравнения, граничные условия, а также вариационный принцип плоской градиентной теории упругости в прямоугольной области. В следующей нашей работе эти результаты будут использованы для построения прикладной модели тонких стержней на основе градиентной теории упругости с применением асимптотико - энергетического метода.

1.Основные уравнения плоской задачи градиентной теории упругости. Основные уравнения плоской задачи градиентной теории упругости в области прямоугольника $(0 \le x \le a, -h \le y \le h)$ представляют собой [7]:

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

Геометрические отношения

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x},$$
$$e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad (2)$$
$$e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)$$

Физические соотношения упругости

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\left[e_{11} - l^2\left(\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial y^2}\right)\right] +$$
$$+\lambda\left[e_{22} - l^2\left(\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial y^2}\right)\right],$$
$$\sigma_{22} = (\lambda + 2\mu)\left[e_{22} - l^2\left(\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial y^2}\right)\right] + \quad (3)$$
$$+\lambda\left[e_{11} - l^2\left(\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial y^2}\right)\right],$$
$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2\mu\left[e_{12} - l^2\left(\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial y^2}\right)\right].$$

Здесь, σ_{11}, σ_{22}, $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ – напряжения; e_{11}, e_{22}, $e_{12} = e_{21}$ – деформации; u_1, u_2 – перемещения; λ, μ – упругие постоянные Ламе; l – параметр, которой имеет размерность длины, характеризует внутреннюю микроструктуру материала.

К основным уравнениям (1)-(3) градиентной теории упругости следует присоединить граничные условия. Эти граничные условия будем излагать используя вариационное уравнение возможных перемещений для задачи (1)-(3).

Для получения выражения потенциальной энергии деформаций по модели (1)-(3) плоской задачи градиентной теории упругости умножим уравнения равновесия (1) соответственно на u_1, u_2, сложим полученные равенства и интегрируем полученный результат по области рассматриваемого прямоугольника.

Для выражения плотности потенциальной энергии деформаций получим:

$$W = \frac{1}{2}\lambda(e_{11} + e_{22})^2 + \mu(e_{11}^2 + e_{22}^2 + 2e_{12}^2) +$$
$$+l^2\left\{\frac{1}{2}\lambda\left[\left(\frac{\partial e_{11}}{\partial x} + \frac{\partial e_{22}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial e_{11}}{\partial y} + \frac{\partial e_{22}}{\partial y}\right)^2\right] +\right.$$
$$+\mu\left[\left(\frac{\partial e_{11}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial e_{11}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial e_{22}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial e_{22}}{\partial y}\right)^2\right] \quad (4)$$
$$\left. +2\mu\left[\left(\frac{\partial e_{12}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial e_{12}}{\partial y}\right)^2\right]\right\}.$$

2. Вариационное уравнение принципа возможных перемещений.

Для формулировки принципа возможных перемещений для плоской задачи градиентной теории упругости сначала вычислим вариацию полной потенциальной энергии деформации, будем иметь

$$
\begin{aligned}
&\delta \int_0^a \int_{-h}^{h} W dx dy = \int_0^a \int_{-h}^{h} \delta W dx dy = \\
&= \int_0^a \int_{-h}^{h} \langle \lambda (e_{11} + e_{22})(\delta e_{11} + \delta e_{22}) + \\
&+ 2\mu (e_{11}\delta e_{11} + e_{22}\delta e_{22} + 2e_{12}\delta e_{12}) + \\
&+ l^2 \Big\{ \lambda \left(\frac{\partial e_{11}}{\partial x} + \frac{\partial e_{22}}{\partial x} \right)\left(\frac{\partial \delta e_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \delta e_{22}}{\partial x} \right) + \\
&+ \lambda \left(\frac{\partial e_{11}}{\partial y} + \frac{\partial e_{22}}{\partial y} \right)\left(\frac{\partial \delta e_{11}}{\partial y} + \frac{\partial \delta e_{22}}{\partial y} \right) + \\
&+ 2\mu \left(\frac{\partial e_{11}}{\partial x}\frac{\partial \delta e_{11}}{\partial x} + \frac{\partial e_{11}}{\partial y}\frac{\partial \delta e_{11}}{\partial y} + \frac{\partial e_{22}}{\partial x}\frac{\partial \delta e_{22}}{\partial x} + \frac{\partial e_{22}}{\partial y}\frac{\partial \delta e_{22}}{\partial y} + \right. \\
&\left. + 2\frac{\partial e_{12}}{\partial x}\frac{\partial \delta e_{12}}{\partial x} + 2\frac{\partial e_{12}}{\partial y}\frac{\partial \delta e_{12}}{\partial y} \right) \Big\} \rangle dx dy = \\
&= \int_0^a \int_{-h}^{h} \left[\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y} \right) \delta u_1 + \left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} \right) \delta u_2 \right] dx dy - \\
&- \int_0^a (\sigma_{21}\delta u_1 + \sigma_{22}\delta u_2) dx \Big|_{y=-h}^{y=h} + \\
&+ \int_{-h}^{h} (\sigma_{11}\delta u_1 + \sigma_{12}\delta u_2) dy \Big|_{x=0}^{x=a} - \\
&- \int_0^a \left\{ \left[\lambda l^2 \left(\frac{\partial e_{11}}{\partial y} + \frac{\partial e_{22}}{\partial y} \right) + 2\mu l^2 \frac{\partial e_{22}}{\partial y} \right] \frac{\partial \delta u_2}{\partial y} \Big|_{y=-h}^{y=h} \right\} dx - \\
&- \int_0^a \left\{ 2\mu l^2 \frac{\partial e_{12}}{\partial y}\frac{\partial \delta u_1}{\partial y} \Big|_{y=-h}^{y=h} \right\} dx +
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

$$+\int_{-h}^{h}\left\{\left[\lambda l^2\left(\frac{\partial e_{11}}{\partial x}+\frac{\partial e_{22}}{\partial x}\right)+2\mu l^2\frac{\partial e_{11}}{\partial x}\right]\frac{\partial\delta u_1}{\partial x}\Big|_{x=0}^{x=a}\right\}dy+$$

$$+\int_{-h}^{h}\left\{2\mu l^2\frac{\partial e_{12}}{\partial x}\frac{\partial\delta u_2}{\partial x}\Big|_{x=0}^{x=a}\right\}dy-$$

$$-\int_{0}^{a}\left\{\left[\lambda l^2\left(\frac{\partial e_{11}}{\partial x}+\frac{\partial e_{22}}{\partial x}\right)+2\mu l^2\frac{\partial e_{11}}{\partial y}\right]\frac{\partial\delta u_1}{\partial x}\Big|_{y=-h}^{y=h}\right\}dx-$$

$$-\int_{0}^{a}\left\{2\mu l^2\frac{\partial e_{12}}{\partial y}\frac{\partial\delta u_2}{\partial x}\Big|_{y=-h}^{y=h}\right\}dx+$$

$$+\int_{-h}^{h}\left\{\left[\lambda l^2\left(\frac{\partial e_{11}}{\partial y}+\frac{\partial e_{22}}{\partial y}\right)+2\mu l^2\frac{\partial e_{22}}{\partial x}\right]\frac{\partial\delta u_2}{\partial y}\Big|_{x=0}^{x=a}\right\}dy+$$

$$+\int_{-h}^{h}\left\{2\mu l^2\frac{\partial e_{12}}{\partial x}\frac{\partial\delta u_1}{\partial y}\Big|_{x=0}^{x=a}\right\}dy=$$

$$=\int_{0}^{a}\int_{-h}^{h}\left[\left(\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial y}\right)\delta u_1+\left(\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial y}\right)\delta u_2\right]dxdy-$$

$$-\int_{0}^{a}\left[\lambda l^2\left(\frac{\partial e_{11}}{\partial y}+\frac{\partial e_{22}}{\partial y}\right)+2\mu l^2\frac{\partial e_{22}}{\partial y}\right]\frac{\partial\delta u_2}{\partial y}\Big|_{y=-h}^{y=h}dx-$$

$$-\int_{0}^{a}2\mu l^2\frac{\partial e_{12}}{\partial y}\frac{\partial\delta u_1}{\partial y}\Big|_{y=-h}^{y=h}dx+$$

$$+\int_{-h}^{h}\left[\lambda l^2\left(\frac{\partial e_{11}}{\partial x}+\frac{\partial e_{22}}{\partial x}\right)+2\mu l^2\frac{\partial e_{11}}{\partial x}\right]\frac{\partial\delta u_1}{\partial x}\Big|_{x=0}^{x=a}dy+$$

$$+\int_{-h}^{h}2\mu l^2\frac{\partial e_{12}}{\partial x}\frac{\partial\delta u_2}{\partial x}\Big|_{x=0}^{x=a}dy-$$

$$-\left[\lambda l^2\left(\frac{\partial e_{11}}{\partial x}+\frac{\partial e_{22}}{\partial x}\right)+2\mu l^2\frac{\partial e_{11}}{\partial y}\right]\delta u_1\Big|_{y=-h}^{y=h}\Big|_{x=0}^{x=a}-$$

$$-2\mu l^2\frac{\partial e_{12}}{\partial y}\delta u_2\Big|_{y=-h}^{y=h}\Big|_{x=0}^{x=a}+$$

$$+\left[\lambda l^2\left(\frac{\partial e_{11}}{\partial y}+\frac{\partial e_{22}}{\partial y}\right)+2\mu l^2\frac{\partial e_{22}}{\partial x}\right]\delta u_2\Big|_{x=0}^{x=a}\Big|_{y=-h}^{y=h}+$$

$$+2\mu l^2\frac{\partial e_{12}}{\partial x}\delta u_1\Big|_{x=0}^{x=a}\Big|_{y=-h}^{y=h}+$$

$$+\int_{-h}^{h}\langle\left(\sigma_{11}-2\mu l^2\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x\partial y}\right)\delta u_1\rangle\Big|_{x=0}^{x=a}dy+$$

$$+\int_{-h}^{h}\langle\left\{\sigma_{12}-\left[\lambda l^2\left(\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial y^2}\right)+2\mu l^2\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x\partial y}\right]\right\}\delta u_2\rangle\Big|_{x=0}^{x=a}dy-$$

$$-\int_{0}^{a}\langle\left\{\sigma_{21}-\left[\lambda l^2\left(\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x^2}\right)+2\mu l^2\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x\partial y}\right]\right\}\delta u_1\rangle\Big|_{y=-h}^{y=h}dx-$$

$$-\int_{0}^{a}\langle\left(\sigma_{22}-2\mu l^2\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x\partial y}\right)\delta u_2\rangle\Big|_{y=-h}^{y=h}dx$$

Имея ввиду выражение вариации потенциальной энергии деформации (5), представим вариационный принцип возможных перемещений:

$$\delta\int_0^a\int_{-h}^{h}Wdxdy-\int_0^a\tilde{q}_1\delta u_1\Big|_{y=+h}dx-\int_0^a\tilde{q}_2\delta u_2\Big|_{y=+h}dx+$$
$$+\int_0^a\tilde{q}_1\delta u_1\Big|_{y=-h}dx+\int_0^a\tilde{q}_2\delta u_2\Big|_{y=-h}dx-\int_{-h}^{h}\tilde{p}_1\delta u_1\Big|_{x=a}dy-\quad(6)$$
$$-\int_{-h}^{h}\tilde{p}_2\delta u_2\Big|_{x=a}dy+\int_{-h}^{h}\tilde{p}_1\delta u_1\Big|_{x=0}dy+\int_{-h}^{h}\tilde{p}_2\delta u_2\Big|_{x=0}dy=0.$$

Из вариационного уравнения (6) следуют уравнения равновесия (1) и следующие граничные условия:
$u_1=u_1^*, u_2=u_2^*$, на $y=\pm h$ или

$$\left\{\sigma_{21}-l^2\left[\lambda\left(\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x^2}\right)+2\mu\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x\partial y}\right]\right\}_{y=\pm h}=\tilde{q}_1^{\pm},$$
$$\left[\sigma_{22}-2\mu l^2\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x\partial y}\right]_{y=\pm h}=\tilde{q}_2^{\pm};\quad(7)$$

а так же

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}=0, \frac{\partial u_2}{\partial y}=0 \text{ или}$$

$$l^2\left[\lambda\left(\frac{\partial e_{11}}{\partial y}+\frac{\partial e_{22}}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial e_{22}}{\partial y}\right]_{y=\pm h}=0, \qquad 2\mu l^2\frac{\partial e_{12}}{\partial y}\bigg|_{y=\pm h}=0; \tag{8}$$

$u_1=u_1^*, u_2=u_2^*$, на $x=0, a$ или

$$\left[\sigma_{11}-2\mu l^2\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x\partial y}\right]_{x=0,a}=$$

$$=\tilde{p}_1, \left\{\sigma_{12}-l^2\left[\lambda\left(\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial y^2}\right)+2\mu\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x\partial y}\right]\right\}_{x=0,a}=\tilde{p}_2; \tag{9}$$

а так же

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=0, \frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \text{ или}$$

$$l^2\left[\lambda\left(\frac{\partial e_{11}}{\partial x}+\frac{\partial e_{22}}{\partial x}\right)+2\mu\frac{\partial e_{11}}{\partial x}\right]_{x=0,a}=0, \qquad 2\mu l^2\frac{\partial e_{12}}{\partial x}\bigg|_{x=0,a}=0. \tag{10}$$

Отметим, что условия (8) и (10) имеют место, включая угловые точки $(a,\pm h)$, $(0,\pm h)$.

Заключение. В работе приведен вывод основных уравнений и граничных условий плоской задачи градиентной теории упругости для прямоугольной области, а также установлен вариационный принцип возможных перемещений Лагранжа. Изложенная теория будет использована на ее основе при построении прикладных моделей растяжения-сжатия и изгиба тонких стрежней по градиентной теории упругости.

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԳՐԱԴԻԵՆՏԱԿԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ, ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԸ ԵՎ ՎԱՐԻԱՑԻՈՆ ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՏԻՐՈՒՅԹԻ ՀԱՄԱՐ

Սարգսյան Լ. Ս.

Աշխատանքում բերվում են առաձգականության գրադիենտական տեսության հարթ խնդրի ուղղանկյուն տիրույթի դեպքում հիմնական հավասարումները, և հաստատվում է հնարավոր տեղափոխությունների սկզբունքը՝ իր վարիացիոն հավասարումով: Վարիացիոն հավասարումից արտածվում են առաձգականության գրադիենտական տեսության հարթ խնդրի հավասարակշռության հավասարումները և ուղղանկյուն տիրույթի դեպքում՝ բոլոր եզրային պայմանները:

Բանալի բառեր. առաձգականության գրադիենտական տեսություն, հարթ խնդիր, ուղղանկյան տիրույթ, հնարավոր տեղափոխությունների սկզբունքը, հիմնական հավասարումներ, եզրային պայմաններ:

BASIC EQUATIONS, BOUNDARY CONDITIONS AND VARIATION PRINCIPLES OF THE PLANE PROBLEM IN THE GRADIENT THEORY OF ELASTICITY FOR A RECTANGULAR DOMAIN

Sargsyan L. S.

The paper demonstrates the basic equations of the plane problem in the frames of the theory of gradient elasticity and establishes the principle of virtual work along with its variation equations. The basic balance equations of the plane problem of the theory of gradient elasticity and the boundary conditions for the rectangular plane are derived.

Keywords: theory of gradient elasticity, plane problem, rectangular plane, principle of virtual work, basic equations, boundary conditions.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кривцов А. М. Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой М. Изд.-во «Физматлит». 2007. 304 с.
2. Ибрагимов И. М., Ковшов А. Н., Назаров Ю. Ф. Основы компьютерного моделирования наносистем СПБ Изд.-во Лань. 2010. 384 с.
3. Иванова Е. А., Кривцов А. М., Морозов Н. Ф., Фирсова А. Д. Учет моментного взаимодействия при расчёте изгибной жесткости наноструктур// Доклады РАН 2003. Т. 391, N 6, С.764-768.
4. Кровцоя А. М. Теоретическая механика. Упругие свойства одноатомных и двухатомных кристаллов СПБ. Изд-во Политехнического университета. 2009. 127 с.
5. Gitman I. M., Askes H., Kuhl E., Aitantis E. C. Stress concentrations in fractured compact bone simulated with a special class of anisotropic gradient elasticititg.// II Inter Journal of Solids and Structures. 2010. Vol. 47. P. 1099-1107.
6. Гитман И. М. Градиентная теория упругости для моделирования парапротезного перелома на поверхности кость – имплантат //Российский журнал биомеханики. 2010 Т. 14. N4(50). С. 17-25.

7. Саркисян Л. С., Саркисян С. О. Асимптотический метод построения прикладной модели деформаций тонких стержней по градиентной теории упругости //Известия НАН Армении. Механика. 2020. Т. 73. N 1. С. 46-62.

Сведения об авторе
Саркисян Л. С. *- кандидат физ.-мат. наук, доцент*
Институт Механики НАН Армении
Эл. почта: slusin@yahoo.com

Поступила в редакцию 19.04.2021
Прошла рецензию 12.07.2021