ՇԻՐԱԿԻ Մ. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
ШИРАКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. НАЛБАНДЯНА
M. NALBANDYAN STATE UNIVERSITY OF SHIRAK
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ SCIENTIFIC PROCEEDINGS

Պրակ Ա
Выпуск А
Issue A

2021 № 1

УДК 539.3
DOI 10.54151/27382559-2021.1a-10

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В МОМЕНТНО-МЕМБРАННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Саркисян С. О.

В работе излагается моментно-мембранная динамическая теория упругих тонких оболочек на основе метода гипотез, который соответствует качественной стороне результата интегрирования трехмерной граничной задачи моментной теории упругости в тонкой области оболочки.

На основе принципа возможных перемещений трехмерной моментной динамической теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений и основных соотношений моментно-мембранной динамической теории упругих тонких оболочек, устанавливается принцип возможных перемещений для моментно-мембранной динамической теории упругих тонких оболочек.

Ключевые слова: тонкие оболочки, моментно-мембранная теория, принцип возможных перемещений.

Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа) для механики деформирования линейных упругих тел является основным, который содержит в себе уравнения равновесия и соответствующие граничные условия. Применяя принцип Даламбера, формулируется принципы возможных перемещений и другие вариационные принципы для динамических задач классической теории упругости и строительной механики [1-5].

В работах [3,6] изложены принцип возможных перемещений и другие вариационные принципы для трехмерной моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений. В работе [7] построена моментно-мембранная статическая теория упругих тонких оболочек (или, иначе, модель тонких оболочек на основе трехмерной моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений, подчиняющей деформационной концепции «сдвиг плюс поворот»), в частности, для этой теории установлены вариационные принципы типа Лагранжа и Кастилиано.

В данной работе для моментно-мембранной динамической теории упругих тонких оболочек устанавливается принцип возможных перемещений, который содержит в себе уравнения движения и соответствующие граничные условия этой теории.

1. **Постановка задачи. Принцип возможных перемещений трехмерной моментной динамической теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений.** Рассмотрим уравнения движения трехмерной моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [3, 6]:

$$\begin{aligned} &\sigma_{ji,j} + X_i - \rho \ddot{v}_i = 0, \\ &\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + c_i - I\ddot{\omega}_i = 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где σ_{ji}, μ_{ji} – компоненты тензоров напряжений и моментных напряжений; ε_{ijk} – компоненты тензора Леви-Чивиты; $\vec{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\vec{\omega} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ – векторы перемещения и независимого поворота; ρ – плотность, а I – мера инерции вращения материала; $\vec{X} = \{X_1, X_2, X_3\}$, $\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$ – векторы интенсивностей объемных сил и моментов; принятая координатная система x_i (в этом параграфе) декартовая, $i, j, k = 1,2,3$.

Допустим, что перемещения v_i и независимые повороты ω_i получают возможные перемещения δv_i и возможные повороты $\delta\omega_i$, которые бесконечно малы, произвольны, независимы от времени и соответствуют геометрическим граничным условиям, которые заданы на части поверхности тела $(S_{v,\omega})$, на другой части поверхности тела $(S_{\sigma,\mu})$, где заданы напряжения и моментные напряжения, $\delta v_i, \delta\omega_i$ – произвольны $(S = S_{\sigma,\mu} + S_{v,\omega})$.

Умножим первые три уравнения движения из (1.1) соответственно на $\delta v_1, \delta v_2, \delta v_3$, а следующие три уравнения из (1.1) на $\delta\omega_1, \delta\omega_2, \delta\omega_3$, полученные уравнения будем складывать, и результат будем интегрировать по объему тела (v), после определенных преобразований приходим к принципу возможных перемещений моментной динамической теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [3, 6]:

$$
\begin{aligned}
&\iiint\limits_{(v)} \left[\left(X_i - \rho \ddot{v}_i \right) \delta v_i + \left(c_i - I \ddot{\omega}_i \right) \delta \omega_i \right] dv + \iint\limits_{S_{\sigma,\mu}} \left(p_i \delta v_i + m_i \delta \omega_i \right) dS = \\
&= \iiint\limits_{(v)} \left(\sigma_{ji} \delta \gamma_{ji} + \mu_{ji} \delta \chi_{ji} \right) dv ,
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

где

$$
p_i = \sigma_{ji} . n_j , \qquad m_i = \mu_{ji} . n_j , \tag{1.3}
$$

n_j – направляющие косинусы нормального к (S) вектора, а γ_{ji} и χ_{ji} – соответственно компоненты тензоров деформаций и изгибов-кручений, которые через перемещения и независимые повороты выражаются так [3, 6]:

$$
\gamma_{ji} = v_{i,j} - \varepsilon_{kji} \omega_k , \qquad \chi_{ji} = \omega_{i,j} . \tag{1.4}
$$

Если в уравнении (1.2) пренебрегать инерционными членами, тогда это уравнение переходит к принципу возможных перемещений для статической задачи трехмерной моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [3,5], а если в уравнении (1.2) пренебрегать членами моментного происхождения, приходим к принципу возможных перемещений классической теории упругости [1-3].

Если использовать соотношения упругости линейной моментной теоремы упругости

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= 2\mu \gamma_{(ij)} + 2\alpha \gamma_{<ij>} + \lambda \gamma_{kk} \delta_{ij} , \\
\mu_{ij} &= 2\gamma \chi_{(ij)} + 2\varepsilon \chi_{<ij>} + \beta \chi_{kk} \delta_{ij} ,
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

где $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – упругие постоянные, а () и $< >$ символы означают симметричную и антисимметричную части тензора, тогда вариационное уравнение (1.2) принципа возможных перемещений истолковывается в следующей форме [3,6]:

$$
\iiint\limits_{(v)} \left[\left(X_i - \rho \ddot{v}_i \right) \delta v_i + \left(c_i - I \ddot{\omega}_i \right) \delta \omega_i \right] dv + \iint\limits_{S_{\sigma,\mu}} \left(p_i \delta v_i + m_i \delta \omega_i \right) dS = \delta U , \tag{1.6}
$$

где

$$\delta U = \iiint\limits_{(v)} \big(2\mu\gamma_{(ij)}\delta\gamma_{(ij)} + 2\alpha\gamma_{<ij>}\delta\gamma_{<ij>} + 2\gamma\chi_{(ij)}\delta\chi_{(ij)} + 2\varepsilon\chi_{<ij>}\delta\chi_{<ij>} +$$

$$+ \lambda\gamma_{kk}\delta\gamma_{kk} + \beta\chi_{kk}\delta\chi_{kk}\big)\delta v = \iiint\limits_{(v)} \delta W dv \; . \qquad (1.7)$$

Здесь W – объемная плотность потенциальной энергии деформации по моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений и выражается так [3,6]:

$$W = \frac{\mu+\alpha}{2}\gamma_{ji}\gamma_{ji} + \frac{\mu-\alpha}{2}\gamma_{ji}\gamma_{ij} + \frac{\lambda}{2}\gamma_{kk}\gamma_{nn} +$$

$$+ \frac{\gamma+\varepsilon}{2}\chi_{ji}\chi_{ji} + \frac{\gamma-\varepsilon}{2}\chi_{ji}\chi_{ji} + \frac{\beta}{2}\chi_{kk}\chi_{nn} \, . \qquad (1.8)$$

Наша цель-обобщение построенной в работе [7] статической моментно-мембранной теории тонких оболочек, изложение основных уравнений и принципа возможных перемещений для моментно-мембранной динамической теории оболочек.

2. **Принятые гипотезы. Перемещения и свободные повороты, деформации и изгибы-кручения, напряжения и моментные напряжения.**

При переходе от трехмерной теории к двумерной теории тонких оболочек естественно применение известной триортогональной системы координат $\alpha_1, \alpha_2, z,$ где α_1, α_2 – представляют собой линии главных кривизн срединной поверхности оболочки $(z = 0)$, а прямолинейная ось z направлена по нормали к этой поверхности. Коэффициенты Ламе этой триортогональной системы координат имеют вид [8]:

$$H_i = A_i\left(1 + \frac{z}{R_i}\right) \quad (i = 1,2), \quad H_3 = 1, \qquad (2.1)$$

где A_i, R_i – коэффициенты первой квадратичной формы и главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки.

Толщину оболочки примем $2h$. Лицевые поверхности оболочки обозначим через $S^+(z = h)$ и $S^-(z = -h)$, на которых заданы соответствующие компоненты тензоров напряжений и моментных напряжений. Боковую поверхность оболочки обозначим через $\Sigma = \Sigma' + \Sigma''$. На Σ' расположена координатная ось α_1, а на Σ''–ось α_2. В свою очередь, $\Sigma' = \Sigma'_1 + \Sigma'_2$, $\Sigma'' = \Sigma''_1 + \Sigma''_2$. На Σ'_1 и Σ''_1 – будем считать, что заданы напряжения и моментные напряжения, а на Σ'_2 и Σ''_2 – заданы перемещения и свободные повороты. В дальнейшем будем принимать, что действующие на оболочку объемные силы и моменты отсутствуют.

Запишем принцип возможных перемещений для трехмерной моментной динамической теории с независимыми полями перемещений и вращений (1.2) для тела оболочки:

$$\iint\limits_{(s)}\int\limits_{-h}^{h}(\sigma_{mn}\delta\gamma_{mn}+\mu_{mn}\delta\chi_{mn})H_1H_2d\alpha_1 d\alpha_2 dz =$$

$$= -\iint\limits_{(s)}\int\limits_{-h}^{h}\left(\rho\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\delta v_n + I\frac{\partial^2\omega_n}{\partial t^2}\delta\omega_n\right)H_1H_2d\alpha_1 d\alpha_2 dz +$$

$$+\iint\limits_{(s^+)}\left(q_n^+\delta v_n + m_n^+\delta\omega_n\right)H_1H_2d\alpha_1 d\alpha_2 - \iint\limits_{(s^-)}\left(q_n^-\delta v_n + m_n^-\delta\omega_n\right)H_1H_2d\alpha_1 d\alpha_2 - \tag{2.2}$$

$$-\int\limits_{\Gamma_1'}\int\limits_{-h}^{+h}\left(\overset{*}{\sigma}_{2n}\delta v_n + \overset{*}{\mu}_{2n}\delta\omega_n\right)H_1d\alpha_1 dz - \int\limits_{\Gamma_1''}\int\limits_{-h}^{+h}\left(\overset{*}{\sigma}_{1n}\delta v_n + \overset{*}{\mu}_{1n}\delta\omega_n\right)H_2d\alpha_2 dz.$$

Для перехода от трехмерной моментной динамической теории упругости к двумерной моментно-мембранной динамической теории в работе [7] принимаются гипотезы (которые из себя представляют качественные стороны результата асимптотического метода интегрирования соответствующей трехмерной граничной задачи в тонкой области [9,10]). По содержанию эти гипотезы можно рассматривать как кинематические и статические.

1.Суть кинематической гипотезы, это предположение о постоянстве всех компонент вектора перемещения и свободного поворота по толщине оболочки (т.е. по координате z):

$$V_i = u_i(\alpha_1,\alpha_2.t),\quad V_3 = w(\alpha_1,\alpha_2,t),$$
$$\omega_k = \Omega_k(\alpha_1,\alpha_2,t)\quad (i=1,2),\quad (k=1,2,3). \tag{2.3}$$

2. Наряду с кинематической гипотезой (2.3), имеют место статические допущения в соответствующих физических соотношениях: о малости напряжения σ_{33} относительно σ_{ii}; σ_{3i} – относительно σ_{i3}; μ_{33} – относительно μ_{ii}; μ_{3i} – относительно $\mu_{i3}(i=1,2)$.

3. Будем принимать, что оболочка тонкая

$$\frac{h}{R} << 1,$$

где R – наименьший из радиусов кривизны срединной поверхности оболочки.

На основе принятых гипотез из основных уравнений трехмерной моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений, для деформаций, изгибов-кручений, напряжений и моментных напряжений получим:

Для деформаций и изгибов-кручений

$$\gamma_{ii} = \Gamma_{ii}(\alpha_1,\alpha_2,t),\ \gamma_{ij} = \Gamma_{ij}(\alpha_1,\alpha_2,t),\ \gamma_{i3} = \Gamma_{i3}(\alpha_1,\alpha_2,t),$$
$$\gamma_{3i} = \Gamma_{3i}(\alpha_1,\alpha_2,t),\quad \gamma_{33} = 0,\quad \chi_{ii} = k_{ii}(\alpha_1,\alpha_2,t), \tag{2.4}$$
$$\chi_{ij} = k_{ij}(\alpha_1,\alpha_2,t),\ \chi_{i3} = k_{i3}(\alpha_1,\alpha_2,t),\ \chi_{3i} = 0,\ \chi_{33} = 0\ \ (i \neq j = 1,2),$$

где

$$\Gamma_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}u_j + \frac{w}{R_i},\ \Gamma_{i3} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial \alpha_i} - \frac{u_i}{R_i} + (-1)^j\Omega_j,$$
$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}u_i + (-1)^i\Omega_3,\ \Gamma_{3i} = (-1)^i\Omega_j,\ k_{i3} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i}, \tag{2.5}$$
$$k_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_j + \frac{\Omega_3}{R_i},\ k_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_i$$
$$(i \neq j = 1,2);$$

Для напряжений и моментных напряжений

$$\sigma_{ii} = \frac{E}{1-\nu^2}(\Gamma_{ii} + \nu\Gamma_{jj}),\ \sigma_{ij} = (\mu+\alpha)\Gamma_{ij} + (\mu-\alpha)\Gamma_{ji},\ \sigma_{i3} = G^*\Gamma_{i3},\ G^* = \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha},$$
$$\mu_{ii} = \frac{2\gamma}{\beta+2\gamma}[2(\beta+\gamma)k_{ii} + \beta k_{jj}],\quad \mu_{ij} = (\gamma+\varepsilon)k_{ij} + (\gamma-\varepsilon)k_{ji}, \tag{2.6}$$
$$\mu_{i3} = Bk_{i3},\qquad B = \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}.$$

В теории оболочек вместо напряжений и моментных напряжений удобно оперировать статически эквивалентными им внутренними усилиями и моментами, отнесенные к единице длины соответствующей координатной линии α_1 и α_2 срединной поверхности. Так как по формулам (2.6) $\sigma_{ii}, \sigma_{ij}, \sigma_{i3}, \mu_{ii}, \mu_{ij}, \mu_{i3}$ – не зависят от z, будем иметь

$$T_{ii} = \int_{-h}^{h}\sigma_{ii}dz = 2\sigma_{ii}h,\quad S_{ij} = \int_{-h}^{h}\sigma_{ij}dz = 2\sigma_{ij}h,\quad N_{i3} = \int_{-h}^{h}\sigma_{i3}dz = 2\sigma_{i3}h,$$
$$L_{ii} = \int_{-h}^{h}\mu_{ii}dz = 2\mu_{ii}h,\ L_{ij} = \int_{-h}^{h}\mu_{ij}dz = 2\mu_{ij}h,\quad L_{i3} = \int_{-h}^{h}\mu_{i3}dz = 2\mu_{i3}h. \tag{2.7}$$

3. Принцип возможных перемещений для моментно-мембранной динамической теории упругих тонких оболочек.

Примем за основу вариационное уравнение принципа возможных перемещений трехмерной моментной динамической теории упругости для тела оболочки (2.2), подставляя в него перемещения и повороты (2.3), деформации и изгибы-кручения (2.4), напряжения и моментные напряжения (2.6), после выполнения интегрирования по z от $-h$ до $+h$, приходим к следующему двумерному вариационному уравнению:

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{(S)}\left\{\left[\left(q_1^+ - q_1^-\right) - 2\rho h\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right]\delta u_1 + \left[\left(q_2^+ - q_2^-\right) - 2\rho h\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right]\delta u_2 + \right.\\
&+\left[\left(q_3^+ - q_3^-\right) - 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]\delta w + \left[\left(m_1^+ - m_1^-\right) + h\left(q_2^+ + q_2^-\right) - 2Ih\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial t^2}\right]\delta\Omega_1 + \\
&+\left[\left(m_2^+ - m_2^-\right) - h\left(q_1^+ + q_1^-\right) - 2Ih\frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2}\right]\delta\Omega_2 + \\
&+\left.\left[\left(m_3^+ - m_3^-\right) - 2Ih\frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}\right]\delta\Omega_3\right\}A_1A_2\,d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
&+\int\limits_{\Gamma_1'}\left(S^*_{21}\delta u_1 + T^*_{22}\delta u_2 + N^*_{23}\delta w + L^*_{21}\delta\Omega_1 + L^*_{22}\delta\Omega_2 + L^*_{23}\delta\Omega_3\right)A_1\,d\alpha_1 + \\
&+\int\limits_{\Gamma_1''}\left(T^*_{11}\delta u_1 + S^*_{12}\delta u_2 + N^*_{13}\delta w + L^*_{11}\delta\Omega_1 + L^*_{12}\delta\Omega_2 + L^*_{13}\delta\Omega_3\right)A_2\,d\alpha_2 = \iint\limits_{(s)}\delta W_0 A_1A_2\,d\alpha_1 d\alpha_2,
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\delta W_0 &= T_{11}\delta\Gamma_{11} + T_{22}\delta\Gamma_{22} + S_{12}\delta\Gamma_{12} + S_{21}\delta\Gamma_{21} + N_{13}\delta\Gamma_{13} + N_{23}\delta\Gamma_{23} + \\
&+ L_{11}\delta k_{11} + L_{22}\delta k_{22} + L_{12}\delta k_{12} + L_{21}\delta k_{21} + L_{13}\delta k_{13} + L_{23}\delta k_{23}.
\end{aligned}
$$

Уравнение (3.1) представляет собой принцип возможных перемещений для моментно-мембранной динамической теории упругих тонких оболочек.

Принцип возможных перемещений (3.1) содержит в себе уравнения движения моментно-мембранной динамической теории упругих тонких оболочек и силовые-моментные граничные условия на контурах Γ_1' и Γ_1'' срединной поверхности оболочек:

Уравнения движения

$$
\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_jT_{ii})}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_iS_{ji})}{\partial\alpha_j} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}S_{ij} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}T_{jj} + \frac{N_{i3}}{R_i} =
$$

$$
= -(q_i^+ - q_i^-) + 2\rho h\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},
$$

$$
\frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_2N_{13})}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_1N_{23})}{\partial\alpha_2} = \left(q_3^+ - q_3^-\right) - 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},
$$

$$\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_jL_{ii})}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial(A_iL_{ji})}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}L_{ij}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}L_{jj}+ \tag{3.2}$$

$$+\frac{L_{i3}}{R_i}+(-1)^jN_{j3}=-(m_i^+-m_i^-)+(-1)^jh(q_j^++q_j^-)+2Ih\frac{\partial^2\Omega_i}{\partial t^2},$$

$$\frac{L_{11}}{R_1}+\frac{L_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_2L_{13})}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_1L_{23})}{\partial\alpha_2}-(S_{12}-S_{21})=$$

$$=(m_3^+-m_3^-)-2Ih\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2}\quad i\neq j=1,2;$$

Граничные условия

$$\begin{aligned}
&\text{на } \Gamma_1':\ S_{21}=S_{21}^*,\ T_{22}=T_{22}^*,\quad N_{23}=N_{23}^*,\\
&\qquad L_{21}=L_{21}^*,\quad L_{22}=L_{22}^*,\quad L_{23}=L_{23}^*,\\
&\text{на } \Gamma_1'':\ T_{11}=T_{11}^*,\quad S_{12}=S_{21}^*,\quad N_{13}=N_{13}^*,\\
&\qquad L_{11}=L_{11}^*,\quad L_{12}=L_{12}^*,\quad L_{13}=L_{13}^*.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Отметим, что W_0 –из себя представляет поверхностную плотность потенциальной энергии деформации по моментно-мембранной теории упругих тонких оболочек. Если использовать физические соотношения этой теории (которые получаются на основании (2.6), (2.7)):

$$\begin{aligned}
&T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}(\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}),\ S_{ij}=2h\big[(\mu+\alpha)\Gamma_{ij}+(\mu-\alpha)\Gamma_{ji}\big],\ N_{i3}=2G^*h\Gamma_{i3},\\
&L_{ii}=2h\frac{2\gamma}{\beta+2\gamma}[2(\beta+\gamma)k_{ii}+\beta k_{jj}],\\
&L_{ij}=2h\big[(\gamma+\varepsilon)k_{ij}+(\gamma-\varepsilon)k_{ji}\big],\ L_{i3}=2Bhk_{i3}\quad(i\neq j=1,2),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
W_0=\frac{1}{2}\Big\{&\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\Gamma_{11}^2+\Gamma_{22}^2+2\nu\Gamma_{11}\Gamma_{22}\right)+2h(\mu+\alpha)\left(\Gamma_{12}^2+\Gamma_{21}^2\right)+\\
&+4h(\mu-\alpha)\Gamma_{12}\Gamma_{21}+2G^*h\left(\Gamma_{13}^2+\Gamma_{23}^2\right)+2h\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\left(k_{11}^2+k_{22}^2\right)+\\
&+2h\frac{4\gamma\beta}{\beta+2\gamma}k_{11}k_{22}+2h(\gamma+\varepsilon)\left(k_{12}^2+k_{21}^2\right)+4h(\gamma-\varepsilon)k_{12}k_{21}+2Bh\left(k_{13}^2+k_{23}^2\right)\Big\}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Вариационный принцип возможных перемещений (3.1) моментно-мембранной динамической теории упругих тонких оболочек является основой для применения вариационных методов решения краевых задач этой теории, а также для этой же цели, при разработке варианта применения метода конечных элементов.

ՀՆԱՐԱՎՈՐ ՏԵՂԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԲԱՐԱԿ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՄՈՄԵՆՏԱ-ՄԵՄԲՐԱՆԱՅԻՆ ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Սարգսյան Ս. Հ.

Աշխատանքում վարկածների մեթոդի հիման վրա, որոնք համապատասխանում են թաղանթի բարակ տիրույթում մոմենտային առաձգականության տեսության եռաչափ եզրային խնդրի ասիմպտոտիկ ինտեգրման արդյունքերին, շարադրված է առաձգական բարակ թաղանթի մոմենտա-մեմբրանային դինամիկ տեսությունը:

Հիմք ընդունելով տեղափոխությունների և պտույտների անկախ դաշտերով եռաչափ մոմենտային առաձգականության դինամիկական տեսության հնարավոր տեղափոխությունների սկզբունքը և առաձգական բարակ թաղանթների մոմենտա-մեմբրանային դինամիկական տեսության հիմնական առնչությունները՝ հաստատվում է հնարավոր տեղափոխությունների սկզբունքը առաձգական բարակ թաղանթի մոմենտա-մեմբրանային դինամիկ տեսության համար:

Բանալի բառեր. բարակ թաղանթներ, մոմենտա-մեմբրանային տեսություն, հնարավոր տեղափոխությունների սկզբունք:

THE PRINCIPLE OF POSSIBLE DISPLACMENTS IN THE MOMENT-MEMBRANE DYNAMIC THEORY OF ELASTIC THIN SHELLS

Sargsyan S. H.

In the present paper the moment-membrane dynamic theory of elastic thin shells is presented based on the hypotheses method, which corresponds to the qualitative side of the result of integration of the three-dimensional boundary-value problem of the moment theory of elasticity in a thin region of the shell.

On the basis of the principle of possible displacements of the three-dimensional moment dynamic theory of elasticity with independent fields of displacements and rotations and the basic relations of the moment-membrane dynamic theory of elastic thin shells, the principle of possible displacements for the moment-membrane dynamic theory of elastic thin shells is established.

Keywords: thin shells, moment-membrane theory, principle of possible displacements.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Вариационные методы решения задач теории упругости. М. -Л.: ГИТТЛ. 1943. 287 с.
2. Ван Цзи-Де. Прикладная теория упругости. М.: Изд-во Физико-математической литературы. 1959. 400 с.
3. Новацкий В. Теория упругости. М.: Изд-во “Мир”. 1975. 872 с.
4. Новацкий В. Динамика сооружений. М.: Изд-во литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам. 1963. 376 с.
5. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во “Мир”. 1987. 542 с.
6. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford. Pergamon. 1986. 383 p.
7. Саркисян С. О. Модель тонких оболочек в моментной теории упругости с деформационной концепцией “сдвиг плюс поворот” //Физическая мезомеханика. 2020. Т. 23. N 4. С. 13-19.
8. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
9. Саркисян С. О. Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости//Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 1. С. 129-147.
10. Саркисян С. О. Теория микрополярных упругих тонких оболочек// Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. Вып. 2. С. 325-343.

Сведения об авторе

Саркисян С. О. *- член-корр. НАН Армении, доктор физ.-мат. наук, профессор*

Ширакский государственный университет

Эл. почта: s_sargsyan@yahoo.com

Поступила в редакцию 25.04.2021

Прошла рецензию 26.05.2021