ՇԻՐԱԿԻ Մ. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
ШИРАКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. НАЛБАНДЯНА
M. NALBANDYAN STATE UNIVERSITY OF SHIRAK
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ SCIENTIFIC PROCEEDINGS

Պրակ Բ
Выпуск Б
Issue B

2020 № 1

ՀՏԴ 372.851

ԴԱՍԱՎԱՆԴՄԱՆ ՄԵԹՈԴԻԿԱ

ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՈՒՂԻՂ ԵՎ ԹՎԱՅԻՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

Սապսզյան Ն. Գ., Մարգարյան Լ. Մ.

Հոդվածում ուսումնասիրված են գծային հավասարումների համակարգերի լուծման ուղիղ և թվային մեթոդները, ներկայացված են այդ մեթոդներով կոնկրետ գծային հավասարումների համակարգերի լուծումները և ստացված արդյունքների համեմատական վերլուծությունը:

Բանալի բառեր. գծային հավասարումների համակարգեր, ուղիղ մեթոդներ, թվային մեթոդներ, Գաուսի մեթոդ, Խոլեցկու մեթոդ, վերին եռանկյունային մատրից, PASCAL ծրագրավորման լեզու, Mathematica համակարգչային փաթեթ:

Ներածություն: Գծային հավասարումների համակարգերի լուծումը մաթեմատիկայի հարակից մի շարք գիտություններում ամենահաճախ հանդիպող խնդիրներից է: Քանի որ գծային ֆունկցիաներն ամենալավ ուսումնասիրվածներն են, ապա ֆունկցիոնալ կախվածության ամենատարածված մոդելները հանդիսանում են գծային մոդելները, որոնք իրենց հերթին հանգեցվում են գծային հավասարումների համակարգերի լուծմանը: Ուստի արդիական է դառնում գծային հավասարումների համակարգերի արագ լուծումը գիտության տարբեր ճյուղերի զանազան խնդիրներ ուսումնասիրելիս: Իսկ դրանց լուծման արագությունը կարելի է ապահովել թվային մեթոդների օգնությամբ:

Գծային հավասարումների համակարգերի լուծման ուղիղ մեթոդներ:

Գաուսի (փոփոխականների արտաքսման) մեթոդ: Դիտարկենք m անհայտի նկատմամբ s հատ գծային հավասարումների համակարգ.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2m}x_m = b_2 \\ . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + a_{s3}x_3 + ... + a_{sm}x_m = b_s \end{cases} \tag{1}$$

Ուսումնասիրենք (1) տեսքի գծային հավասարումների համակարգերի լուծման ամենալայն կիրառություն ունեցող մեթոդներից մեկը՝ Գաուսի մեթոդը, որին անվանում են նաև փոփոխականների արտաքսման մեթոդ [1-3]: Գաուսի մեթոդի օգնությամբ հաշվարկները կատարվում են 2 հիմնական փուլերով, որոնք կոչվում են *ուղիղ և հակադարձ քայլեր*: Գաուսի մեթոդի ուղիղ քայլ փուլի էությունը կայանում է (1) համակարգից փոփոխականների հերթական արտաքսման մեջ, որի արդյունքում ստացվում է ելակետային համակարգին համարժեք համակարգ՝ համապատասխան վերին եռանկյունային մատրիցով: Փոփոխականների որոշումը կատարվում է հակադարձ քայլ փուլում:

Ուղիղ քայլը բաղկացած է արտաքսման $m-1$ քայլերից: Մասնավորապես.

1-ին քայլ: Այս քայլի նպատակը x_1 փոփոխականի արտաքսումն է գծային հավասարումների համակարգի $i = 2,3,...,s$ հավասարումներից: Ենթադրենք, որ $a_{11} \neq 0$: Նրան կանվանենք 1-ին քայլի գլխավոր տարր: Գտնենք $\mu_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$ $\left(i = 2,3,...,s\right)$ մեծությունները, որոնք կոչվում են 1-ին քայլի արտադրիչներ: (1) գծային հավասարումների համակարգի 2-րդ, 3-րդ,…,s-րդ հավասարումներից հերթականորեն հանենք 1-ին հավասարումը՝ մտովի բազմապատկած համապատասխանաբար $\mu_{21}, \mu_{31}, ..., \mu_{s1}$ մեծություններով: Սա թույլ կտա (1) գծային հավասարումների համակարգի բոլոր հավասարումներից, բացառությամբ 1-ինի, արտաքսել x_1 փոփոխականը: Արդյունքում կստանանք (1) ելակետային համակարգին համարժեք հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1m}x_m = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + ... + a_{2m}^{(1)}x_m = b_2^{(1)} \\ \qquad ... \\ \qquad a_{s2}^{(1)}x_2 + a_{s3}^{(1)}x_3 + ... + a_{sm}^{(1)}x_m = b_s^{(1)} \end{cases} \tag{2}$$

որտեղ $a_{ij}^{(1)}$ և $b_i^{(1)}$ մեծությունները $(i=2,3,\ldots,s, \quad j=2,3,\ldots,m)$ որոշվում են $a_{ij}^{(1)}=a_{ij}-\mu_{i1}a_{1j}, b_i^{(1)}=b_i-\mu_{i1}b_1$ բանաձևերով:

Համանմանորեն կատարվում են մյուս քայլերը: Նկարագրենք հերթական k-րդ քայլը:

k-րդ քայլ: Այս քայլի նպատակը x_k փոփոխականի արտաքսումն է գծային հավասարումների համակարգի $i=k+1,\ldots,s$ հավասարումներից: Դիցուք $a_{kk}^{(k-1)}\neq 0$, որտեղ $a_{kk}^{(k-1)}$ գործակիցը կոչվում է k-րդ քայլի գլխավոր տարր: Գտնենք k-րդ քայլի $\mu_{ik}=\dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\ (i=k+1,\ldots,s)$ արտադրիչները: Նախորդ քայլի ընթացքում ստացված գծային հավասարումների համակարգի $(k+1),\ldots,s-$րդ հավասարումներից հանենք k-րդ հավասարումը՝ մտովի բազմապատկած համապատասխանաբար $\mu_{k+1,k},\mu_{k+2,k},\ldots,\mu_{sk}$ մեծություններով, իսկ 1-ին, 2-րդ, …, $(k-1)$-րդ հավասարումները թողնենք անփոփոխ: Սա թույլ կտա համակարգի բոլոր հավասարումներից, բացառությամբ 1-ին, 2-րդ, …, $(k-1)$-րդ հավասարումների, արտաքսել x_k փոփոխականը:

Այսպես շարունակելով՝ $(m-1)$-րդ արտաքսման ժամանակ ընդհանուր դեպքում կստանանք գծային հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1m}x_m=b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+\ldots+a_{2m}^{(1)}x_m=b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad a_{tt}^{(m-1)}x_t+\ldots+\quad a_{tm}^{(m-1)}x_m=b_t^{(m-1)} \end{cases} \tag{3}$$

Ինչպես տեսնում ենք, ստացված (3) համակարգն արդեն պարունակում է t հատ հավասարում $(t\le s)$, քանի որ կատարված ձևափոխությունների արդյունքում որոշ հավասարումներ հնարավոր է դեն են նետվել՝ դառնալով նույնություններ: Ընդ որում՝ նաև ենթադրվում է, որ կատարված ձևափոխությունների ընթացքում չի ստացվել այնպիսի հավասարում, որի ձախ մասի գործակիցները 0 են, իսկ աջ մասում 0-ից տարբեր թիվ է, քանի որ այդ դեպքում ստացված համակարգը, ինչպես նաև նրան համարժեք (1) ելակետային գծային հավասարումների համակարգը, կլինեին անհամատեղելի: Իսկ քննարկվող դեպքում (3), ինչպես նաև (1) ելակետային գծային հավասարումների համակարգը կլինեն համատեղելի: Ընդ որում՝ եթե $t=m$, ապա այն կլինի որոշակի, իսկ եթե $t<m$, ապա՝ անորոշ:

Օրինակ 1: [4]

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1+2x_2+3x_3=2 \\ x_2+2x_3+3x_4=-2 \\ x_3+2x_4+3x_5=2 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_3-2x_4-x_5=2 \\ x_4=-1 \\ x_5=1 \end{cases}$$

Համակարգը որոշակի է և ունի միակ լուծում՝ $(1,-1,\ 1,-1,\ 1)$:

Օրինակ 2: [4]

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 24 & -19 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 & | & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & | & 0 \\ 0 & -3 & -18 & 15 & | & 0 \\ 0 & 2 & 12 & -10 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 & | & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + \dfrac{4x_2}{3} + \dfrac{x_4}{3} = 0 \\ x_3 = -\dfrac{x_2}{6} + \dfrac{5x_4}{6} \end{cases} \sim \begin{cases} x_4 = -3x_1 - 4x_2 \\ x_3 = -\dfrac{5x_1}{2} - \dfrac{7x_1}{2} \end{cases}$$

Համակարգը համատեղելի է և ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ:

Օրինակ 3: [4]

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & | & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & | & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & | & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & | & -7 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & | & -52 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & | & 19 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -7x_2 + 7x_3 - 9x_4 = 1 \\ 20x_4 = -52 \\ -10x_4 = 19 \end{cases}$$

Համակարգն անհամատեղելի է:

Գաուսի մեթոդը միակության բաժանման սխեմայի և համակարգին համապատասխան մատրիցի LU վերլուծության դեպքում: Այժմ Գաուսի մեթոդը կդիտարկենք առավել ընդհանուր դիրքերից, ինչը թույլ կտա ոչ միայն առավել խորն ընկալել ու հասկանալ մեթոդը, այլև ստեղծել նրա իրականացման բարձր արդյունավետություն ունեցող մեքենայական ալգորիթմներ, ինչպես նաև ուսումնասիրել այլ ճշգրիտ մեթոդներ [5, 6]:

Դիցուք տրված է m փոփոխականի նկատմամբ m հատ գծային հավասարումների համակարգ, որը մատրիցային հավասարման միջոցով կունենա հետևյալ տեսքը.

$$Ax=b,\ \text{որտեղ}\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mm} \end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}: \tag{4}$$

Ինչպես տեսանք, Գաուսի մեթոդի 1-ին ուղիղ քայլի հաշվումների կատարման արդյունքում մատրիցային տեսքով գրված (4) գծային հավասարումների համակարգը բերվում է հետևյալ տեսքի.

$$A^{(1)}x=b^{(1)},\ \text{որտեղ}\ A^{(1)}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2m}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3m}^{(1)} \\ . & . & . \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & a_{m3}^{(1)} & \dots & a_{mm}^{(1)} \end{pmatrix},\ b^{(1)}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ \dots \\ b_m^{(1)} \end{pmatrix}: \tag{5}$$

Մյուս կողմից ներմուծենք հետևյալ մատրիցը.

$$M_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\mu_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\mu_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . \\ -\mu_{m1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}: \tag{6}$$

Հեշտ է ստուգել, որ ճշմարիտ են $A^{(1)}=M_1A,\ \ b^{(1)}=M_1b$ մատրիցային հավասարությունները, այսինքն՝ (4) գծային հավասարումների համակարգի ձևափոխումը (5) տեսքի համարժեք է համակարգի աջ և ձախ մասերին համապատասխան մատրիցների բազմապատկմանը ներմուծված $\boldsymbol{M}_1$ մատրիցի հետ:

Գաուսի մեթոդի ուղիղ քայլը եզրափակող $(m-1)$-րդ քայլի հաշվումների կատարման արդյունքում նախավերջին քայլում ստացված գծային հավասարումների համակարգը բերվում է հետևյալ տեսքի.

$$A^{(m-1)}x=b^{(m-1)},\quad A^{(m-1)}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2m}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3m}^{(2)} \\ . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm}^{(m-1)} \end{pmatrix},\ b^{(m-1)}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(2)} \\ \dots \\ b_m^{(m-1)} \end{pmatrix}: \tag{7}$$

Մյուս կողմից ներմուծենք հետևյալ մատրիցը.

$$M_{m-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\mu_{m,m-1} & 1 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Այստեղ նույնպես ճշմարիտ են $A^{(m-1)} = M_{m-1}A^{(m-2)}$, $b^{(m-1)} = M_{m-1}b^{(m-2)}$ մատրիցային հավասարությունները, այսինքն՝ նախավերջին քայլում ստացված գծային հավասարումների համակարգի ձևափոխումը (7) տեսքի համարժեք է համակարգի աջ և ձախ մասերին համապատասխան մատրիցների բազմապատկմանը ներմուծված M_{m-1} մատրիցի հետ:

Այսպիսով, կարող ենք փաստել, որ $A^{(m-1)}$ մատրիցը ստացվում է A մատրիցի՝ $M_1, M_2, \ldots, M_{m-1}$ մատրիցների հետ հաջորդական բազմապատկումից՝ $A^{(m-1)} = M_{m-1}\ldots M_2 M_1 A$: Համանմանորեն կարելի է փաստել, որ $b^{(m-1)} = M_{m-1}\ldots M_2 M_1 b$: $A^{(m-1)} = M_{m-1}\ldots M_2 M_1 A$-ից բխում է հետևյալ առնչությունը. $A = M_1^{-1} M_2^{-1} \ldots M_{m-1}^{-1} A^{(m-1)}$:

Հեշտ է ստանալ, որ

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \mu_{21} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \mu_{31} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & & \\ \mu_{m1} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_{32} & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & & \\ 0 & \mu_{m2} & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \ldots M_{m-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mu_{m,m-1} & 1 \end{pmatrix}:$$

Կատարենք $U = A^{(m-1)}$, $L = M_1^{-1} M_2^{-1} \ldots M_{m-1}^{-1}$ նշանակումները: Որոշելով L մատրիցը՝ կտեսնենք, որ այն ունի հետևյալ տեսքը.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \mu_{21} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \mu_{31} & \mu_{32} & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & & \\ \mu_{m1} & \mu_{m2} & \mu_{m3} & \ldots & 1 \end{pmatrix} : \qquad (9)$$

Այդ դեպքում կստանանք. $A = LU$: Հենց սա էլ իրենից ներկայացնում է A *մատրիցի* LU *-վերլուծությունը*, *այսինքն՝* A *մատրիցի այն ներկայացումը, որը ստացվում է ստորին եռանկյունային*

L *և վերին եռանկյունային* U *մատրիցների արտադրյալից:* Գաուսի մեթոդի ուղիղ քայլն այս կերպ կարելի է դիտարկել որպես գծային հավասարումների համակարգին համապատասխան A մատրիցի LU-վերլուծության հաշվման գործընթաց, որի k–րդ քայլում որոշվում են L մատրիցի k-րդ սյան և U մատրիցի k-րդ տողի տարրերը:

Օրինակ 4: [5]

$$\begin{cases} 10x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 8 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 7 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 6 & 2 & 0 & 8 \\ 5 & 1 & -2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 6 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -4.4 & 5.4 & 4.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} 10x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 8 \\ -2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ -4.4x_3 + 5.4x_4 = 4.4 \\ 0.5\, x_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & -1.6 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -4.4 & 5.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad b = (8, 7, 2, 2),$$

$$b_2^{(1)} = b_2 - \mu_{21} b_1 = 7 - 0.5 \cdot 8 = 3, \quad b_3^{(1)} = b_3 - \mu_{31} b_1 = 2 - 0.3 \cdot 8 = -0.4,$$

$$b_4^{(1)} = b_4 - \mu_{41} b_1 = 2 - 0 \cdot 8 = 2, \qquad b^{(1)} = (8, 3, -0.4, 2):$$

$$b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - \mu_{32} b_2^{(1)} = -0.4 - (-1.6) \cdot 3 = 4.4, \quad b_4^{(2)} = b_4^{(1)} - \mu_{42} b_2^{(1)} = 2 - (-3) \cdot 3 = 11,$$

$$b^{(2)} = (8, 3, 4.4, 11):$$

$$b_4^{(3)} = b_4^{(2)} - \mu_{43} b_3^{(2)} = 11 - 2.5 \cdot 4.4 = 0, \qquad b^{(3)} = (8, 3, 4.4, 0):$$

Համակարգը որոշակի է և ունի միակ լուծում՝ $(1, 0, -1, 0)$:

Գծային հավասարումների համակարգերի լուծման Խոլեցկու մեթոդը (քառակուսի արմատների մեթոդ): Դիցուք պահանջվում է լուծել դրականորեն որոշված սիմետրիկ A մատրիցով գծային հանրահաշվական հավասարումների (4) համակարգը: Այդ տիպի գծային համակարգերի լուծման համար հաճախ օգտագործվում է *Խոլեցկու մեթոդը*, որին անվանում են նաև *քառակուսի արմատների մեթոդ* [5, 6]: Մեթոդի հիմքում ընկած է A մատրիցի՝ հատուկ LU-վերլուծության կառուցման ալգորիթմը, որի արդյունքում այն բերվում է $A = L L^T$ տեսքին, որտեղ L^T-ն L-ի տրանսպոնացված մատրիցն է: Նշված վերլուծության մեջ ստորին եռանկյունային L մատրիցն արդեն պարտադիր չէ, որ գլխավոր անկյունագծի վրա պարունակի միայն 1-եր, ինչպես Գաուսի մեթոդում էր: Միայն պահանջվում է, որ L մատրիցի անկյունագծային l_{ii} տարրերը լինեն դրական. $L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ldots & 0 \\ . & . & . & \\ l_{m1} & l_{m2} & \ldots & l_{mm} \end{pmatrix}$:

Եթե $A = L L^T$ վերլուծությունն արդեն ստացվել է, ապա (4) գծային հավասարումների համակարգի լուծումը հանգեցվում է եռանկյունային մատրիցներով հետևյալ համակարգերի հաջորդական լուծմանը.

$$L y = b, \quad L^T x = y: \tag{10}$$

Նախ գտնենք L մատրիցի տարրերը: Դրա համար որոշենք $L L^T$ մատրիցի տարրերը, և դրանք հավասարեցնենք A մատրիցի համապատասխան տարրերին: Արդյունքում կստանանք հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} l_{11}^2 = a_{11}, \\ l_{i1} l_{11} = a_{i1}, \quad i = 2,3,\ldots,m \\ l_{21}^2 + l_{22}^2 = a_{22}, \\ l_{i1} l_{21} + l_{i2} l_{22} = a_{i2}, \quad i = 3,4,\ldots,m \\ . \quad . \quad . \\ l_{k1}^2 + l_{k2}^2 + \ldots + l_{kk}^2 = a_{kk}, \\ l_{i1} l_{k1} + l_{i2} k_{k2} + \ldots + l_{ik} l_{kk} = a_{ik}, \quad i = k+1,\ldots,m \\ . \quad . \quad . \\ l_{m1}^2 + l_{m2}^2 + \ldots + l_{mm}^2 = a_{mm} \end{cases} \tag{11}$$

Լուծելով (11) համակարգը՝ հաջորդաբար կգտնենք.

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}},\ l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}, i = 2,3,\ldots,m, \qquad l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}, l_{i2} = \frac{(a_{i2} - l_{i1} l_{21})}{l_{22}}, i = 3,4,\ldots,m,$$

$$\ldots,\ l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - l_{k1}^2 - l_{k2}^2 - \ldots - l_{k,k-1}^2}, \qquad l_{ik} = \frac{(a_{ik} - l_{i1} l_{k1} - l_{i2} l_{k2} - \ldots - l_{i,k-1} l_{k,k-1})}{l_{kk}},\ i = k+1,\ldots,m, \tag{12}$$

$$\ldots,\ l_{mm} = \sqrt{a_{mm} - l_{m1}^2 - l_{m2}^2 - \ldots - l_{m,m-1}^2}:$$

Ստացված (12) բանաձևերով որոշելով L մատրիցի տարրերը՝ կլուծենք նախ (10)-ի առաջին համակարգը, այնուհետև՝ երկրորդը, ինչի արդյունքում կստանանք ելակետային (4) գծային հավասարումների համակարգի լուծումը: Նկատենք, որ անկյունագծային տարրերի որոշման համար օգտագործվում է քառակուսի արմատ հանելու գործողությունը: Այդ պատճառով էլ Խոլեցկու մեթոդը նաև անվանում ենք քառակուսի արմատների մեթոդ: Ապացուցված է, որ համապատասխան արմատատակ արտահայտությունների դրական լինելը A մատրիցի դրականորեն որոշված լինելու հետևանքն է: Խոլեցկու մեթոդն օժտված է մի շարք հետաքրքիր հատկություններով, որոնց շնորհիվ էլ դրականորեն որոշված և սիմետրիկ մատրիցով գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի լուծման դեպքում այն ավելի նախընտրելի է, քան Գաուսի մեթոդը:

Օրինակ 5: [5]

$$\begin{cases} 6.25x_1 - x_2 + 0.5x_3 = 7.5 \\ -x_1 + 5x_2 + 2.12x_3 = -8.68 \\ 0.5x_1 + 2.12x_2 + 3.6x_3 = -0.24 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6.25 & -1 & 0.5 & 7.5 \\ -1 & 5 & 2.12 & -8.68 \\ 0.5 & 2.12 & 3.6 & -0.24 \end{array}\right)$$

$$l_{11}^2 = a_{11},\ l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 2.5,\ l_{21}l_{11} = a_{21},\ l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = -\frac{1}{2.5} = -0.4,$$

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = a_{22},\ l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{5 - 0.16} = 2.2,\ l_{31}l_{11} = a_{31},$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{0.5}{2.5} = 0.2,\ l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} = a_{32},\ l_{32} = \frac{(a_{32} - l_{31}l_{21})}{l_{22}} = \frac{2.2}{2.2} = 1,$$

$$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = a_{33},\ l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{3.6 - 0.04 - 1} = 1.6 :$$

$$A = LL^T,\ Ax = b,\ Ly = b,\ L^T x = y:$$

$$b = (7.5, -8.68, -0.24),\ L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 2.5 & 0 & 0 \\ -0.4 & 2.2 & 0 \\ 0.2 & 1 & 1.6 \end{pmatrix}$$

$$Ly = b,\ \begin{cases} 2.5y_1 = 7.5 \\ -0.4y_1 + 2.2y_2 = -8.68 \\ 0.2y_1 + y_2 + 1.6y_3 = -0.24 \end{cases} \sim \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = -3.4 \\ y_3 = 1.6 \end{cases}$$

$$L^T = \begin{pmatrix} 2.5 & -0.4 & 0.2 \\ 0 & 2.2 & 1 \\ 0 & 0 & 1.6 \end{pmatrix},\ L^T x = y,\ \begin{cases} 2.5x_1 - 0.4x_2 + 0.2x_3 = 3 \\ 2.2x_2 + x_3 = -3.4 \\ 1.6x_3 = 1.6 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = 0.8 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Գծային հավասարումների համակարգերի լուծման թվային մեթոդներ: Ինչպես տեսանք, գծային հավասարումների համակարգերի լուծման Գաուսի մեթոդի ալգորիթմը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}},\ b_k^{(k)} = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}},\ a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)},$$

$$b_i^{(k)} = a_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} b_k^{(k)},\ k = \overline{1,n};\quad i, j = \overline{k+1,n}\ ;$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}\ ,\ x_i = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j\ ,\ i = \overline{n-1,1}:$$

Ներկայացված ալգորիթմին համապատասխան ծրագիրը PASCAL ծրագրավորման լեզվում կունենա հետևյալ տեսքը.

```
Var n,i,j,k:integer;tmp:real;
      b,x:array [1..100] of real;
      a:array [1..100,1..100] of real;
Begin
    Read (n);
    For i:=1 to n do
    For j:=1 to n do read (a[i,j]);
    For i:=1 to n do read (b[i]);
    For k:=1 to n do
    For j:=k+1 to n do
      Begin
          tmp:= a[j,k]/a[k,k];
          For i:=k to n do
          a[j,i]:=a[j,i]- tmp*a[k,i];
          b[j]:=b[j]-tmp*b[k];
      End;
   For k:=n downto 1 do
    Begin
        tmp:=0;
        For j:=k+1 to n do tmp:=tmp+a[k,j]*x[j];
        x[k]:=(b[k]-tmp)/a[k,k];
    End;
   For i:=1 to n do writeln(x[i]:0:5)
End.
```

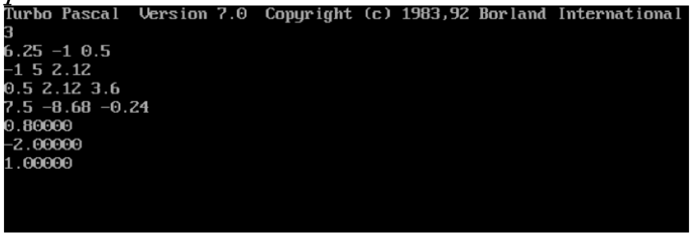
Ներկայացված ծրագիրը մուտքագրելով PASCAL ծրագրի միջավայրում՝ կարող ենք 3-4 վայրկյանների ընթացքում լուծել քննարկված այն օրինակները, որտեղ անհայտների թիվը հավասար է հավասարումների թվին:

Օրինակ 1:


```
Turbo Pascal  Version 7.0  Copyright (c) 1983,92 Borland International
5
1 1 1 1 0
0 1 1 1 1
1 2 3 0 0
0 1 2 3 0
0 0 1 2 3
0 0 2 -2 2
1.00000
-1.00000
1.00000
-1.00000
1.00000
```

Օրինակ 4:

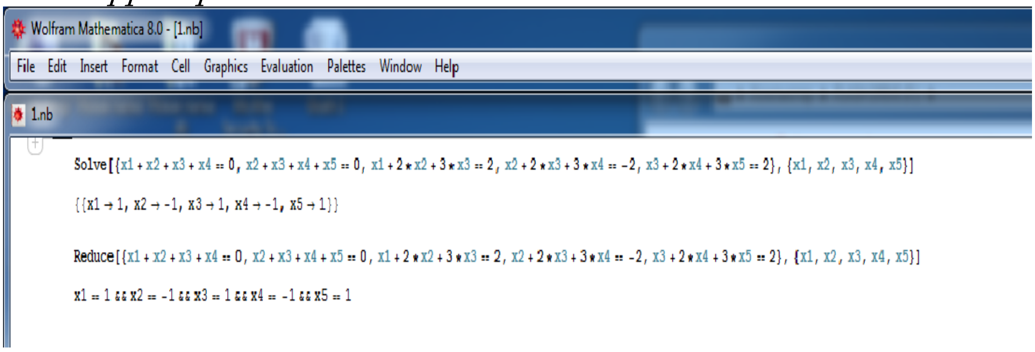
Օրինակ 5:



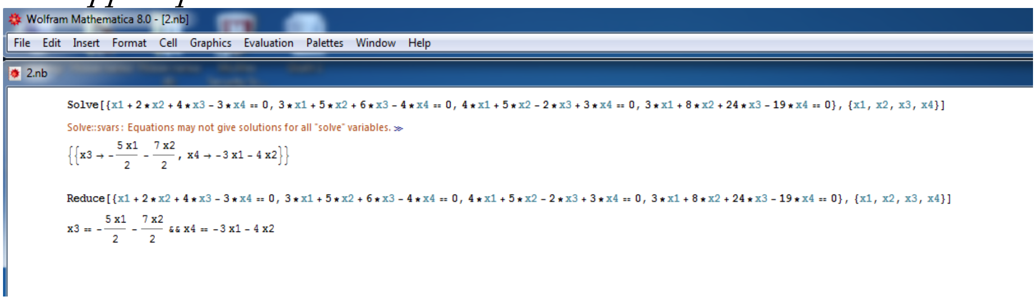
Ինչպես տեսնում ենք, PASCAL ծրագրավորման լեզվով գրված ծրագրի արդյունքում ներկայացված օրինակների դեպքում պատասխանը համընկնում է ուղիղ մեթոդով լուծված արդյունքի հետ: Սակայն նշենք, որ գրված ծրագիրը հնարավորություն չի տալիս լուծել այն գծային հավասարումների համակարգերը, որոնց անհայտների թիվը չի համընկնում հավասարումների թվի հետ: Նշված դեպքի համար ալգորիթմի ստացումը և ծրագրի կազմումը կապված է բավականին մեծ դժվարությունների հետ և կարող է լուծվել համապատասխան նեղ ոլորտի մասնագետների՝ ծրագրավորողների կողմից լուրջ աշխատանքի դեպքում:

Սակայն վերջին տարիներին համապատասխան մասնագետների կողմից ստեղծվել են համակարգչային մաթեմատիկական փաթեթներ, որոնք հզոր գործիք են հանդիսանում զանազան մաթեմատիկական խնդիրների լուծման համար, մասնավորապես, գծային հավասարումների համակարգերի լուծման համար [15-18]: Նմանատիպ փաթեթներից են MAPLE, MATHEMATICA, MATLAB, MACSYMA և այլ համակարգչային փաթեթները, որոնք հնարավորություն են ընձեռում լուծել բարդ մաթեմատիկական խնդիրներ՝ չխորանալով ծրագրավորման նրբությունների մեջ: Մենք կկիրառենք Mathematica փաթեթը: Տարբեր բնույթի մաթեմատիկական խնդիրների լուծումը հանգում է տարբեր տիպի հավասարումների արմատների որոշման կամ հավասարումների համակարգերի լուծման [15-18]: Այդ նպատակով փաթեթում նախատեսված են բավական արդյունավետ միջոցներ, որոնցից տվյալ պարագայում կարելի է նշել *Solve, Reduce, Eliminate* *օպերատորները:* Նշված օպերատորների կիրառմամբ լուծենք ուղիղ մեթոդներով լուծված գծային հավասարումների համակարգերը՝ համեմատական վերլուծություն կատարելու նպատակով:

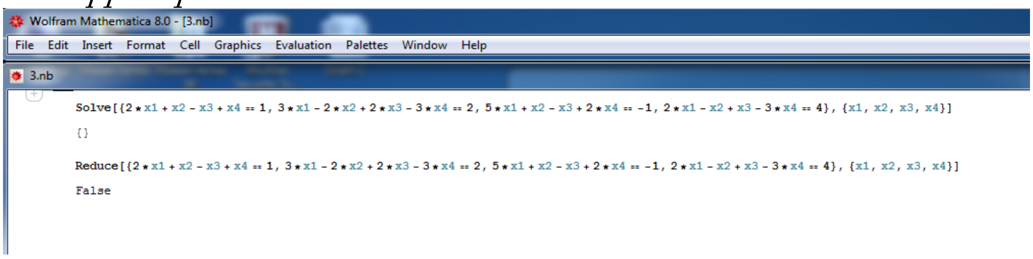
Օրինակ 1:



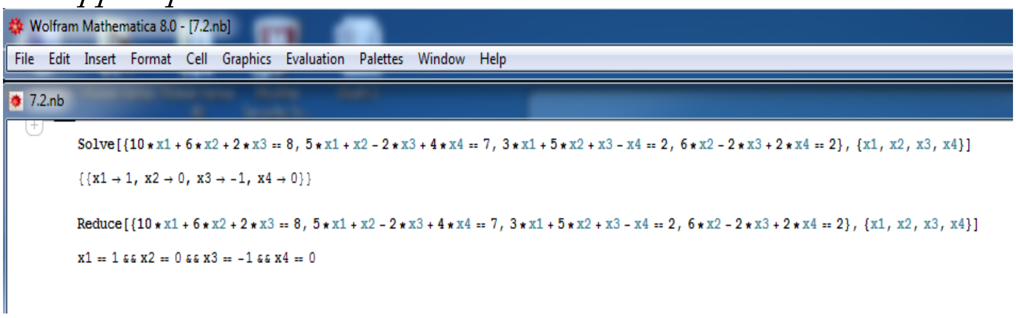
Օրինակ 2:



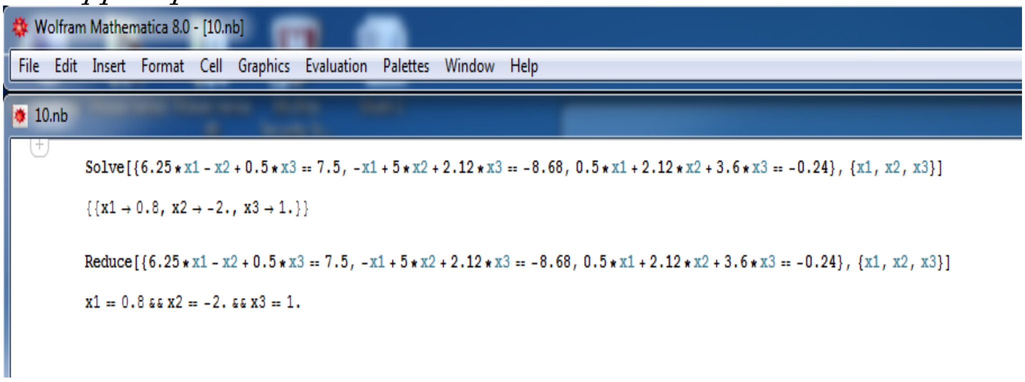
Օրինակ 3:



Օրինակ 4:



Օրինակ 5:



Ինչպես տեսնում ենք, երկու օպերատորների կիրառման արդյունքում բոլոր օրինակների դեպքում պատասխանը ստացվում է ակնթարթորեն և լիովին համընկնում է ուղիղ մեթոդով լուծված արդյունքի հետ:

Գծային հավասարումների համակարգերի լուծման արդյունքների համեմատական վերլուծություն: Ներկայացնենք դիտարկված գծային հավասարումների համակարգերի լուծման ուղիղ և թվային մեթոդների կիրառման արդյունքում ստացված լուծումների համեմատական վերլուծությունը (Աղյուսակ 1):

Կատարված վերլուծության արդյունքում կարող ենք փաստել, որ.

1. Գծային հավասարումների համակարգերի լուծման ուղիղ և թվային մեթոդների կիրառմամբ ստացված արդյունքները լիովին համընկնում են միմյանց հետ:
2. Գծային հավասարումների համակարգերի լուծման թվային մեթոդների ամենաառաջնային առավելությունն ուղիղ մեթոդների նկատմամբ ժամանակի խնայողությունն է: Իհարկե, PASCAL ծրագրավորման լեզվով գծային հավասարումների համակարգերի լուծման համար անհրաժեշտ է նախապես գրել ծրագիրը, բայց ունենալով այն՝ 4-5 վայրկյանների ընթացքում կարելի է լուծել ցանկացած համակարգ, իհարկե, երբ անհայտների թիվը հավասար է հավասարումների թվին: Իսկ MATHEMATICA համակարգչային փաթեթի դեպքում ուղղակի համապատասխան օպերատորի ներմուծմամբ ակնթարթորեն հնարավոր է լուծել կամայական տեսքի գծային հավասարումների համակարգ:
3. PASCAL ծրագրավորման լեզվի նկատմամբ MATHEMATICA համակարգչային փաթեթի առավելությունը կայանում է նրանում, որ վերջինիս օգնությամբ հնարավոր է լուծել ցանկացած տեսքի գծային

հավասարումների համակարգ, իսկ PASCAL ծրագրավորման լեզվով գրված ծրագրի միջոցով հնարավոր եղավ լուծել միայն այն գծային հավասարումների համակարգերը, որտեղ անհայտների թիվը հավասար էր հավասարումների թվին:

Աղյուսակ 1.

Գծային հավասարումների համակարգերի լուծումների համեմատական վերլուծություն

	Ուղիղ մեթոդների կիրառման արդյունքում ստացված լուծումներ	PASCAL ծրագրավորման լեզվի կիրառման արդյունքում ստացված լուծումներ	Mathematica համակարգչային փաթեթի կիրառման արդյունքում ստացված լուծումներ
Օրինակ 1	Միակ լուծում՝ (1,-1,1,-1,1)	Միակ լուծում՝ (1,-1,1,-1,1)	Միակ լուծում՝ (1,-1,1,-1,1)
Օրինակ 2	Անթիվ բազմությամբ լուծումներ՝ $\begin{cases} x_4 = -3x_1 - 4x_2 \\ x_3 = -\frac{5x_1}{2} - \frac{7x_2}{2} \end{cases}$	-	Անթիվ բազմությամբ լուծումներ՝ $\begin{cases} x_4 = -3x_1 - 4x_2 \\ x_3 = -\frac{5x_1}{2} - \frac{7x_2}{2} \end{cases}$
Օրինակ 3	Լուծում չունի	-	Լուծում չունի
Օրինակ 4	Միակ լուծում՝ (1,0,-1,0)	Միակ լուծում՝ (1,0,-1,0)	Միակ լուծում՝ (1,0,-1,0)
Օրինակ 5	Միակ լուծում՝ (0.8,-2,1)	Միակ լուծում՝ (0.8,-2,1)	Միակ լուծում՝ (0.8,-2,1)

ПРЯМЫЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Сапсзян Н. Г., Маргарян Л. М.

В данной статье рассматриваются прямые и численные методы решения систем линейных уравнений, представлены решения конкретных систем линейных уравнений и сравнительный анализ полученных результатов.

Ключевые слова: системы линейных уравнений, прямые методы, численные методы, метод Гаусса, метод Холецкого, верхняя треугольная матрица, язык программирования PASCAL, компьютерный пакет Mathematica.

DIRECT AND NUMERICAL METHODS OF SOLVING SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS

Sapszyan N. G., Margaryan L. M.

In the present paper direct and numerical methods of solving systems of linear equations are studied, solutions of concrete systems of linear equations and a comparative analysis of the obtained results are introduced.

Keywords: systems of linear equations, direct methods, numerical methods, method of Gauss, method of Kholeckiy, upper triangular matrix, programming language PASCAL, computer package Mathematics.

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Москва, “Наука”. 1968. 431 с.
2. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел. Москва, “Высшая школа”. 1979. 559 с.
3. Окунев Л. Я. Высшая алгебра. Москва. Государственное Издательство Технико-Теоретической Литературы. 1949. 432 с.
4. Варпаховский Ф. Л., Солодовников А. С. Задачник-практикум по алгебре. Москва “Просвещение”. 1982. 167 с.
5. Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В. Вычислительные методы для инженеров. Москва, “Высшая школа”. 1994. 273 с.
6. Форсайт Дж., Молер К. Численные решения систем линейных алгебраических уравнений. Москва. “Мир”. 1964. 167 с.
7. Марченко А. И., Марченко Л. А. Программирование в среде Turbo Pascal 7.0. М.: Бином Универсал, К.: ЮНИОР. 1997. 496 с.
8. Епанешников А.М., Епанешников В.А. Программирование в среде Turbo Pascal 7.0. –М.: «ДИАЛОГ-МИФИ». 1998. 367 с.
9. Фаронов В. В. Turbo Pascal 7.0. Начальный курс. М.: «Нолидж», 1999. 616 с.
10. Окулов С. М. Программирование в алгоритмах. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2004. 341 с.
11. Долинский М. С. Алгоритмизация и программирование на Turbo Pascal от простых до олимпиадных задач. СПб.: Питер, 2005. 237 с.
12. Говорухин В. Н., Цибулин В. Г. Компьютер в математическом исследовании. Санк-Петербург. Питер. 2001. 619 с.
13. http://pascalabc.net/o-yazike-paskal

14. http://www.xn--344-qddohl3g.xn--p1ai/1_pascal/1.html
15. Половко А. М., Бутусов П. Н. Matlab для студента. СПб.: БХБ-Петербург. 2005. 321 с.
16. Дьяконов В. П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. М.:Солон. 2006. 720 с.
17. Половко А. М. Mathematica для студента ./СПб.:БХВ-Петербург. 2007. 368 с.
18. http://www.wolfram.com/products/mathematica/history.ru.html
19. Фадеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. Москва "Наука". 1972. 304 с.

Տեղեկություններ հեղինակների մասին
Սապսզյան Ն. Գ.- *հետբուհական կրթության համակարգող*
Շիրակի պետական համալսարան
Էլ.փոստ՝ nellisapszyan@mail.ru

Մարգարյան Լ. Մ.- *ֆիզմաթ գիտությունների թեկնածու, դոցենտ*
Շիրակի պետական համալսարան
Էլ.փոստ՝ lilit-margaryan1986@mail.ru

Տրվել է խմբագրություն 01.11.2019