ՇԻՐԱԿԻ Մ. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
ШИРАКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. НАЛБАНДЯНА
M. NALBANDYAN STATE UNIVERSITY OF SHIRAK
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ SCIENTIFIC PROCEEDINGS

Պրակ Բ
Выпуск Б
Issue B

2020 № 1

ՀՏԴ 51-7 ԴԱՍԱՎԱՆԴՄԱՆ ՄԵԹՈԴԻԿԱ

# ՇՂԹԱՅԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԵՏԱՔՐՔԻՐ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

**Կոստանյան Ն. Կ., Մութաֆյան Մ. Ն.**

Առօրյա կյանքում և գիտության այլ բնագավառներում շատ հաճախ հանդիպում ենք երևույթների, որոնցում առկա խորը մաթեմատիկական հիմքերի մասին դժվար է անգամ կռահել: Այդպիսիք են մեր լսած երաժշտությունը, օրացույցը, որով առաջնորդվում ենք, մեխանիզմներում օգտագործվող ատամնանիվները և այլն:

Աշխատատանքն ամբողջությամբ նվիրված է թվերի տեսության բաժիններից մեկի՝ շղթայական կոտորակների մի քանի հետաքրքիր կիրառությունների ներկայացմանը: Բերված են շղթայական կոտորակների, նրանց մերձավոր կոտորակների, հատկությունների կիրառություններ ֆիզիկայի, աստղաֆիզիկայի, երաժշտության և այլ բնագավառներում: Փոքր անդրադարձ է կատարված նաև շղթայական կոտորակների կիրառությանը մաթեմատիկական անալիզի՝ շարքերի զուգամիտության և մոտավոր արժեքների հաշվման գործընթացներում:

**Բանալի բառեր.** շղթայական կոտորակ, մերձավոր կոտորակ, օրացույց, էլեկտրական շղթա, ֆիլոտակսիս, հաճախություն, շարք, մոտարկում, սխալանք, զուգամիտություն:

**Ներածություն:** Ներկա տեխնոլոգիական զարգացումների դարաշրջանում անհրաժեշտություն է առաջանում զարգացնելու և առավել ընդլայնելու մի շարք մաթեմատիկական ապարատների կիրառությունները: Զարգացման այսպիսի ուղի է որդեգրել շղթայական կոտորակների համակարգը, որը հիմնաքարային դիրքում է հայտնվել հաշվողական մաթեմատիկայում: Աշխարհի տարբեր ծայրերում, մասնավորապես Եվրոպայում, ներկայումս զբաղվում են շղթայական կոտորակների առավել ակնառու և անհրաժեշտ կիրառությունների որոնմամբ, զարգացմամբ և օգտագործմամբ՝ ծանր հաշվարկներն առավել պարզերով փոխարինելու համար: Այդ պարագայում շղթայական կոտորակներն իրենց բազմասպեկտ և արդյունավետ կիրառություններով դառնում են մաթեմատիկական «թեժ կետերից», որոնք էլ կբացահայտենք աշխատանքի շրջանակներում:

**Շղթայական կոտորակները և նրանց մի քանի հատկությունները:**

Ցանկացած $\frac{p}{q}$ ռացիոնալ թիվ կարելի է ներկայացնել վերջավոր շղթայական կոտորակի տեսքով՝

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_n}}} = [a_0, a_1, \dots, a_n],$$

որտեղ $a_0, a_1, a_2, \dots$- ամբողջ թվեր են, իսկ $a_1 \geq 1, a_2 \geq 1, \dots$: Իռացիոնալ թվերը վերլուծվում են անվերջ շղթայական կոտորակի [1-3, 5]:

Կամայական, վերջավոր կամ անվերջ $[a_0, a_1, \dots, a_k, \dots]$ շղթայական կոտորակի

$$\delta_k = [a_0, a_1, \dots, a_k] = \frac{P_k}{Q_k}, \qquad k \geq 0$$

«կտրվածքը» կոչվում է *մերձավոր կոտորակ:* Նշենք մերձավոր կոտորակների մի քանի հատկություններ [1-4].

**Հատկություն 1:**[1] *Կամայական $k \geq 2$-ի դեպքում*

$$\delta_k = [q_0, q_1, \dots, q_k] = \frac{P_k}{Q_k}$$

*մերձավոր կոտորակի համարիչն ու հայտարարը որոշվում են*

$$P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2} \text{ և } Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2} \qquad (1)$$

*ռեկուրենտ բանաձևերով, ուր նախնական տվյալներն են*՝

$$P_0 = q_0, \qquad P_1 = q_0 q_1 + 1, \qquad Q_0 = 1, \qquad Q_1 = q_1: \qquad (2)$$

**Հատկություն 2:** *$P_k$ և $Q_k$ մեծությունները փոխկապակցված են հետևյալ կերպ.*

$$P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^{k-1}, \quad k \geq 1: \qquad (3)$$

**Հատկություն 3:** *Եթե $\alpha$-ն որևէ դրական, ռացիոնալ թիվ է, իսկ $\frac{P_k}{Q_k}$-ն $\alpha$-ի $k$-րդ մերձավոր կոտորակը, ապա*

$$\left|\alpha - \frac{P_k}{Q_k}\right| < \frac{1}{Q_k Q_{k+1}} < \frac{1}{{Q_k}^2}, \qquad k \geq 0: \qquad (4)$$

[1] Հատկությունների ապացույցները կարելի է նայել [1]-ում:

**Շղթայական կոտորակներն օրացույցում:** Գրիգորյան օրացույցը, որով առաջնորդվում ենք մենք, հիմնված է այն փաստի վրա, որ Երկիրը հավասարաչափ պտտվում է իր առանցքի շուրջը՝ մեկ օրում կատարելով մեկ պտույտ: Երկրի՝ Արեգակի շուրջ պտտման մեկ պտույտը կազմում է մեկ տարի, և այդ տարին հավասար է 365,24219878… օր: Ըստ Գրիգորյան օրացույցի՝ պարզ և նահանջ տարիների հերթագայությունը պահպանվում է ըստ հետևյալ կանոնի. *եթե տարվա թիվն ավարտվում է երկու զրոներով, իսկ մյուս երկու թվանշաններից կազմված թիվը չի բաժանվում 4-ի, ապա այդ տարին պարզ տարի է* (օրինակ 1700,1800-պարզ են, իսկ 2000-նահանջ տարի է): Այդպիսի օրացույցում տարվա միջին տևողությունը կազմում է 365 օր 5 ժամ 49 րոպե 12 վայրկյան, որն ընդամենը 12 վայրկյան է ավել տարվա իրական երկարությունից[4]: Այսպիսի ճշգրտությունը լիովին ընդունելի է պրակտիկության տեսանկյունից, քանի որ այդ դեպքում 1 օրվա սխալանք առաջ կգա 3300 տարին մեկ անգամ:

Այժմ օրացույցի խնդրին անդրադառնանք շղթայական կոտորակների տեսանկյունից: Տարվա տևողությունն արտահայտենք օրերով և այն ներկայացնենք շղթայական կոտորակով.

$$1\ \text{տարի} = 365{,}24219878\ldots = 365 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cdots}}}}$$

այս շղթայական կոտորակի մերձավոր կոտրկների հաջորդականությունն է՝

$$365; 365\frac{1}{4}; 365\frac{7}{29}; 365\frac{8}{33}; 365\frac{31}{128}; \ldots$$

Եթե ընտրենք $365\frac{1}{4}$ կոտորակը, ապա այդ դեպքում յուրաքանչյուր չորրորդ տարին նահանջ է: Երրորդ մերձավոր կոտորակը՝ $[365,4,7,1] = 365\frac{8}{33}$, ընկած էր իրանական օրացույցի հիմքում, որը 1079 թվականին առաջարկել է մաթեմատիկոս, աստղագետ և բանաստեղծ Օմար Խայամը: Այդպիսի օրացույցը մեկ տարում սխալվում է 19 վայրկյան, և 1 օրվա սխալանք ստացվում է 4500 տարին մեկ անգամ: Նրանում բոլոր տարիները բաժանված են 33-ամյա շրջափուլի, որի ներսում 7 անգամ նահանջ է համարվում յուրաքանչյուր չորրորդ տարին, իսկ ութերորդ անգամ նահանջ է համարվում հինգերորդ տարին: Եթե վերցնենք $365\frac{31}{128}$ կոտորակը, կստանանք նրան համապատասխանող օրացույցը՝ մեծ ճշտությամբ, ըստ որի՝ տարվա միջին տևողությունը միայն 1 վայրկյանով է տարբերվում իրականից: Օրացույցի այսպիսի կառուցվածքում անհրաժեշտ էր ամեն 128 տարին մեկ բաց թողնել 1 նահանջ տարի:

**Շղթայական կոտորակները ֆիզիկայում:**

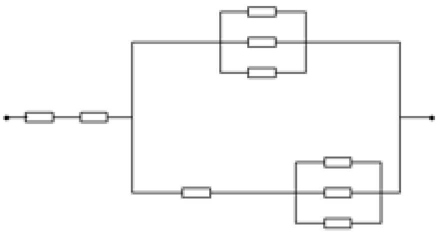
***Խնդիր:*** *Դիցուք ունենք շատ մեծ քանակությամբ միավոր դիմադրություններ: Կարելի՞ է արդյոք նրանցից կազմել սխեմա, որն ունենա $\frac{34}{15}$ դիմադրություն կամ ընդհանրապես $\frac{p}{q}$, որտեղ $p$-ն և $q$-ն տրված բնական թվեր են:*

Այս հարցի պատասխանը միանշանակ դրական է, քանի որ ցանկացած $\frac{p}{q}$ կոտորակի համար կարելի է նախ զուգահեռ միացնել $q$ հատ միավոր դիմադրություններ՝ ընդհանուրում ստանալով $\frac{1}{q}$, այնուհետև այդ սխեման բազմապատկել $p$ հատ նույնատիպերով՝ միացնելով հաջորդաբար: Այս կերպ վարվելով՝ մեզ տրված $\frac{34}{15}$ ընդհանուր դիմադրությամբ շղթան կառուցելու համար մեզ պետք կգա $34 \cdot 15 = 510$ միավոր դիմադրություններ (Նկ. 1):


**Նկ.1**

Դրա համար նախ նկատենք, որ $\frac{34}{15} = 2 + \frac{4}{15} = 2 + \frac{1}{3+\frac{3}{4}} = 2 + \frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$ և այս շղթայական կոտորակի տեսքով ներկայացումը կօգտագործենք անհրաժեշտ էլեկտրական սխեման կառուցելու համար՝ սկսելով «ներքևի հարկից»:

Սկզբում միմյանց զուգահեռ միացնենք 3 միավոր դիմադրություն և այդ բլոկին հաջորդական միացնենք մեկ դիմադրություն. գումարային կստանանք $\frac{4}{3}$ դիմադրությամբ շղթա:



**Նկ. 2**

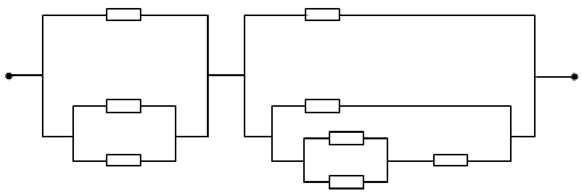
Այժմ եթե ստացված սխեմային զուգահեռ միացնենք բլոկ, որը կազմված է 3 զուգահեռ միացված դիմադրություններից, ապա կստանանք $\frac{4}{15}$ ընդհանուր դիմադրությամբ սխեմա: Մնացել է այս սխեմային հաջորդաբար ավելացնել 2 դիմադրություն: Այսպիսով մենք կառուցեցինք սխեմա՝ կազմված 9 միավոր դիմադրություններից, որի ընդհանուր դիմադրությունն է $\frac{34}{15}$ (Նկ. 2):

Դիտարկված օրինակը հանգեցնում է հետևյալ եզրակացությանը. ենթադրենք, որ անհրաժեշտ է կազմել $\frac{p}{q}$ դիմադրությամբ շղթա, որտեղ $p$-ն և $q$-ն փոխադարձաբար պարզ թվեր են: Այդ դեպքում $\frac{p}{q}$ թիվը ներկայացնենք վերջավոր շղթայական կոտորակի տեսքով՝ $\frac{p}{q}=[a_0, a_1, \dots, a_n]$:

Այս ներկայացումից և շղթայի կառուցման վերը նկարագրված եղանակից պարզ է, որ անհրաժեշտ շղթան կառուցելու համար բավարար են $E(p,q)=\sum_{k=0}^{n} a_k$ դիմադրությունները: Հատկապես նշենք այն, որ տրված դիմադրությամբ միավոր դիմադրություններից էլեկտրական շղթայի կառուցման այսպիսի մեթոդը ոչ միշտ է բերում միավոր դիմադրությունների մինիմալ անհրաժեշտության: Քանի որ

$$\frac{34}{15}=\frac{34}{3\cdot 5}=\frac{2}{3}+\frac{8}{5}=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right)+\left(1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}\right),$$

ապա կարող ենք կառուցել $\frac{34}{15}$ ընդհանուր դիմադրությամբ անհրաժեշտ սխեման՝ կազմված երկու հաջորդական միացված բլոկներից, իսկ յուրաքանչյուր բլոկ կառուցված $\frac{2}{3}$ և $\frac{8}{5}$ թվերի շղթայական կոտորակների վրա, որոնք տրված են փակագծերում (Նկ. 3): Այսպիսով, ստացվեց $\frac{34}{15}$ ընդհանուր դիմադրությամբ էլեկտրական սխեմա, որում օգտագործվել է 8 միավոր դիմադրություններ (նախկինում օգտագործել էինք 9-ը):



**Նկ. 3**

**Շղթայական կոտորակներն ատամնանիվներում:** Ինչպես գիտենք, շղթայական կոտորակները պատմականորեն առաջացան մեծ համարիչով և հայտարարով կոտորակներն ավելի փոքրերով փոխարինելու անհրաժեշտությունից: Հյուգենսը ատամնանիվի հավաքածուի միջոցով արեգակնային համակարգի մոդելի կառուցման ժամանակ հանդիպեց յուրօրինակ դժվարության. *որպեսզի երկու շղթայակցված ատամնանիվների պտտման ժամանակների հարաբերությունը հավասարվի այդ ատամնանիվներին համապատասխանող մոլորակների Արեգակի շուրջ պտտման ժամանակների հարաբերությանը, անհրաժեշտ է, որ նույն հարաբերությունն ունենա այդ երկու ատամնանիվների ատամների թվերի հարաբերությունը:* Սակայն այդ հարաբերությունն արտահայտվում է այնպիսի մեծ թվերով, որ տեխնիկապես հնարավոր չէ կառուցել ատամների այդպիսի «աստղաբաշխական» թվով անիվներ: Դրա համար անհրաժեշտություն է առաջանում այդ մոտավոր մոդելում, սահմանափակումներ անելով, ընտրել ատամների տեխնիկապես գոյություն ունեցող այնպիսի թվեր, որ այդ թվերի հարաբերությունը հնարավորությունների սահմանում մոտ լինի մեծ թվերի հարաբերությանը: Հենց այստեղ էլ օգնության են գալիս շղթայական կոտորակները: Դիցուք $a$-ն և $b$-ն այդ մեծ թվերն են, որոնց հարաբերությունը մենք ուզում ենք մոտավորության սկզբունքով փոխարինել $c$ և $d$ փոքր թվերի հարաբերությամբ. որոշակիության համար ենթադրենք, որ տեխնիկական կամ այլ պայմանով $d$-ն չի կարող մեծ լինել 100-ից: Այդ դեպքում մենք $\frac{a}{b}$ հարաբերությունը կներկայացնենք շղթայական կոտորակի տեսքով և կհաշվենք հաջորդական մերձավոր կոտորակները: Դիցուք այդ դեպքում պարզվեց, որ $q_k \leq 100$, բայց $q_{k+1} > 100$: Այդ դեպքում մենք կընդունենք, որ $c = p_k$, $d = q_k$ և ըստ մերձավոր կոտորակների հատկության [հատկություն 3]՝

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}},$$

կարող ենք պարզել այն սխալանքը, որ թույլ ենք տալիս $\frac{a}{b}$-ը $\frac{c}{d}$-ով փոխարինելիս:

***Օրինակ:*** $a = 1355, b = 946$

Դիտարկենք $\frac{a}{b}$ կոտորակը, և նրա շղթայական կոտորակի վերլուծությունը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$\frac{a}{b} = \frac{1355}{946} == [1; 2,3,5,8,3]$ և եթե վերցնենք $\frac{p_3}{q_3} = \frac{53}{37}$, $\frac{p_4}{q_4} = \frac{434}{303}$ մերձավոր կոտորակները. ապա

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p_3}{q_3}\right| = \left|\frac{1355}{946} - \frac{53}{37}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} = \frac{1}{11211} < 0.0001։$$

Եթե մենք մեր խնդրի լուծումը որոնեինք տասնորդական կոտորակով և ոչ թե շղթայականով, ապա այդպիսի ճշգրտության հասնելու համար մենք պետք է վերցնենք ստորակետից հետո ոչ պակաս, քան 4 նիշով կոտորակ, այսինքն՝ 10000 հայտարարով կոտորակ, բայց դա ոչ մի օգտակար նշանակություն չէր ունենա, քանի որ մեր ունեցած սկզբնական կոտորակի հայտարարն ավելի փոքր կլիներ՝ 946: Դրա համար այս տիպի խնդիրներում շղթայական կոտորակների ապարատը ոչ միայն մեծ առավելություն ունի տասնորդական կոտորակների նկատմամբ, այլ շատ դեպքերում թույլ է տալիս լուծումները փնտրել այնտեղ, որտեղ տասնորդական կոտորակները ոչինչ անելու հնարավորություն չեն տալիս: Բանն այն է, որ շղթայական կոտորակների դեպքում որպես հայտարար կարելի է վերցնել ցանկացած թիվ, ոչ թե միայն 10-ի ինչ-որ աստիճաններ, և դա տալիս է ընտրության լայն հնարավորություն:

Անդրադառնանք Հյուգենսի խնդրին: Նա, ըստ հաշվարկների, տեսավ, որ ատամների թվերի հարաբերությունը հանգում է հետևյալ մեծ համարիչով և հայտարարով անկրճատելի կոտորակին՝

$$\frac{m}{n} \approx \frac{77708431}{2640858},$$

Այսպիսի թվերով ատամնանիվների կառուցումը, ինչ խոսք, գործնականորեն մեծ բարդություններ է առաջացնում, անգամ կարող ենք ասել, որ անհնարին է: Վերևում նկարագրված ալորիթմից օգտվելով՝ Հյուգենսը փորձեց խնդրի լուծումը փնտրել համապատասխան շղթայական կոտորակի մերձավոր կոտորակների մեջ: Նա որպես այդպիսի մերձավոր կոտորակ գտավ $\frac{73}{51}$ կոտորակը:

**Շղթայական կոտորակները երաժշտությունում:** Բախի ժամանակներից սկսած՝ երաժշտությունում օգտագործվում է *հավասարաչափ տեմպավորված սանդղակը,* որը յուրաքանչյուր օկտավայում պարունակում է 12 կիսատոն [7]: Եթե $l$ երկարությամբ լարն արձակում է առաջին օկտավայի «դո» հնչյունը՝ համապատասխան $f$ հաճախությամբ (մեկ վայրկյանում 512 տատանում), ապա $\frac{2}{3}l$

երկարությամբ լարն արձակում է $\frac{3}{2}f$ հաճախությամբ ձայն(բնական կվինտա), իսկ $\frac{1}{2}l$ երկարությամբ լարը՝ $2f$ հաճախությամբ ձայն(օկտավա): Մեր ականջը երկու հնչյունների համեմատումից որսում է ոչ թե նրանց հաճախությունների հարաբերությունը, այլ այդ հարաբերության լոգարիթմը: Անհրաժեշտ է ընդամենը վերցնել երկու հիմքով լոգարիթմ, որպեսզի մեկ օկտավայի ինտերվալը չափվի որպես միավոր.

$$\log_2 \frac{2f}{f} = 1 \,:$$

Ի՞նչու առաջացավ օկտավայի հենց 12 ինտերվալի բաժանումը: Որպեսզի օկտավան և բնական կվինտան հնարավորինս ստույգ տեղավորվեն միևնույն *հավասարաչափ տեմպավորման* մեջ, անհրաժեշտ է օկտավան բաժանել այնքան մասերի, որ $\log_2 \frac{3}{2}$ թիվը լավ մոտենա ընտրված հայտարարով կոտորակին:

$$\log_2 \frac{3}{2} = [0; 1,1,2,2,3,1 \ldots]$$

թվի մերձավոր կոտորակներն են՝

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \ldots$$

$1$ և $\frac{1}{2}$ մոտարկումների սխալանքը շատ մեծ է: $\frac{3}{5}$ մոտարկումը համապատասխանում է Արևելքի ժողովուրդների մոտ գոյություն ունեցող *պենտատոնիկային,* իսկ $\frac{7}{12}$ մոտարկումն ամենահաջողվածն է: Սխալանքը՝

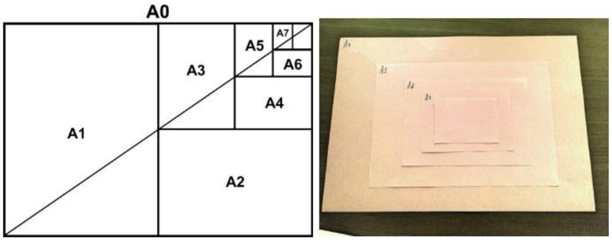
$$\left|\log_2 \frac{3}{2} - \frac{7}{12}\right| < 2 \cdot 10^{-3},$$

որն ականջի համար անլսելի է:

**Շղթայական կոտորակների այլ կիրառություններ:**

- Եթե թղթի ուղղանկյուն թերթիկը երկու հավասար մասերի բաժանելով ուզում ենք ստանալ կողմերի նույն հարաբերությամբ երկու նոր թերթիկներ, ապա սկզբնական թերթիկի կողմերը պետք է հարաբերեն այնպես, ինչպես $\sqrt{2}:1$: Իրոք, եթե կիսենք $\sqrt{2}$ և $1$ կողմերով ուղղանկյունը, ապա յուրաքանչյուր կեսի երկար կողմը կլինի $1$, իսկ կարճ կողմը՝ $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$: Այդ կողմերի հարաբերությունը՝ $\frac{1}{1/\sqrt{2}}$, կրկին հավասար է $\sqrt{2}$-ի: Հենց այս հատկությամբ են օժտված $A(A0, A1, A2, \ldots)$

ֆորմատի թղթերը: Դրանում կհամոզվենք, եթե կիսենք $A4$ ֆորմատի թուղթը (Նկ. 4):




**Նկ. 4**

$A4$ ֆորմատի ստանդարտ թղթի չափերն են՝ $210 \times 297$մմ: Նրանց հարաբերությունը՝

$$\frac{297}{210} = \frac{99}{70} = [1; 2,2,2,2,2],$$

$\sqrt{2} = [1; (2)]$ թվի 5-րդ մերձավոր կոտորակն է: Նրանց միջև տարբերությունն աչքի համար աննկատելի է՝

$$\left|\sqrt{2} - \frac{297}{210}\right| < 10^{-4}:$$

Թերթիկի կողմերի արտադրյալը(մետրերով) քիչ է տարբերվում $\frac{1}{16}$-ից.

$$\left|0{,}297 \cdot 0{,}210 - \frac{1}{16}\right| < 2 \cdot 10^{-4}:$$

Դա կապված է նրա հետ, որ $A4$-ը կազմում է $A0$ վատմանային թերթիկի $\frac{1}{16}$-րդ մասը, որի մակերեսը $1\text{մ}^2$ է: Եթե գտնենք բոլոր ֆորմատներին համապատասխանող շղթայական կոտորակները, ապա կտեսնենք, որ $A4$-ը $\sqrt{2}$-ի լավագույն մոտարկումն է: Օրինակ՝ $A0(841 \times 1189\text{մմ})$-ն $\sqrt{2}$-ի ընդամենը 4-րդ մերձավոր կոտորակն է:

● Դեռևս Գյոթեն ընդգծում էր բնության գալարագծային տենդենցները: Ծառերի տերևների պտուտակային դիրքը ճյուղերի վրա նկատել էին դեռ հին ժամանակներում: Գալարագիծը նկատել էին նաև արևածաղկի սերմերի դասավորությունում, սոճիի կոներում, անանասներում, կակտուսներում և այլն: Բուսաբանությունում այս երևույթը հայտնի է *ֆիլլոտակսիս* անվամբ: Բուսաբանների և մաթեմատիկների համատեղ աշխատանքը լույս սփռեց բնության այս զարմանալի երևույթների վրա: Եթե հաշվենք յուրաքանչյուր կողմում ոլորվող գալարների քանակը, ապա որպես կանոն կստանանք Ֆիբոնաչիի երկու հարևան թվեր, այսինքն՝ հետևյալ հաջորդականությանը պատկանող թվեր՝

$$\{F_n\} = \{0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55, \dots\},$$

որում
$$F_0 = 0,\ F_1 = 1, \qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} (n \geq 1):$$
Այսպես սոճիի կոնի մի կողմում կան 3 պտտվող գալարներ, իսկ մյուս կողմում՝ 5 գալարներ: Եղևնու դեպքում համապատասխանաբար 5 և 8, մայրիի կոնը համապատասխանաբար ունի 8 և 13 գալարներ: Սարդը սարդոստայնը հյուսում է պարուրաձև: Փոթորիկը պտտվում է պարուրաձև: Տերևների այսպիսի պարուրաձև դասավորությունը բույսերին թույլ է տալիս ստանալ ավելի մեծ քանակով արևի ճառագայթներ, որոնք անհրաժեշտ են ֆոտոսինթեզի համար: Ֆիբոնաչիի հարևան թվերի հարաբերությունները վերածվում են շատ պարզ շղթայական կոտորակների, օրինակ՝
$$\frac{5}{3} = [1;1,1,1], \qquad \frac{8}{5} = [1;1,1,1,1] \text{ և այլն:}$$
Սրանք այսպես կոչված *ոսկե հատման* մերձավոր կոտորակներն են.
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cdots}}} = [(1)]:$$
Այս ամենից զատ՝ շղթայական կոտորակները լայն կիրառություն ունեն նաև մաթեմատիկական անալիզում, հատկապես՝շարքերի տեսությունում: Ինչպես ցույց կտանք հետագայում, գոյություն ունեն բազմաթիվ շարքեր, որոնց գումարները շարքերի տեսությանը համապատասխան օրենքով հաշվելն առավել ժամանակատար և ոչ ճշգրիտ են ստացվում, քան երբ շարքը վերլուծվում է համապատասխան շղթայական կոտորակի և հաշվվում մերձավոր կոտորակների արժեքները: Այս դեպքում թույլ տված սխալանքը հասցվում է մինիմումի: Այժմ քննարկենք ստորև նշված օրինակը՝ վերը ասվածի ճշտության մեջ համոզվելու համար:

Դիցուք տրված է Ֆուրիեի հետևյալ շարքը [8]
$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}, \tag{5}$$
Աղյուսակ 1-ում ներկայացված են $x = 0.1$ դեպքում Ֆուրիեի (5) շարքի հաշվման արդյունքները:

Ֆուրիեի (6) շարքը դանդաղ զուգամիտող շարք է. միլիոն գումարելիով մասնավոր գումարն ապահովում է 6 ճշգրիտ տասնորդական կարգ:

Աղյուսակ 1.

**Աղյուսակ 1. $x = 0.1$ դեպքում Ֆուրիեի շարքի մասնավոր գումարների հաշվում**

$$0.05 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin 0.1n}{n}, \qquad (6)$$

| Շարքի անդամների թիվը | Շարքի անդամների արժեքները | Շարքի մասնավոր գումարները | Սխալանքը, $\varepsilon = \left\|0.05 - \sum_{n=1}^{n} a_n\right\|$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.09983341665 | 0.09983341665 | 0.04983341665 |
| 2 | -0.0993346654 | 0.0004987512493 | 0.04950124875 |
| 4 | -0.09735458558 | 0.001650901226 | 0.04834909877 |
| 8 | -0.08966951136 | 0.005790516862 | 0.04420948314 |
| 16 | -0.06247335019 | 0.01978557833 | 0.03021442167 |
| 32 | 0.001824191982 | 0.05167800285 | 0.001678002848 |
| 64 | -0.001821081326 | 0.04870835088 | 0.001291649118 |
| 128 | -0.001808670509 | 0.048909047 | 0.001090952998 |
| 256 | -0.001759533571 | 0.04903469561 | 0.0009653043888 |
| 512 | -0.001570922837 | 0.04918626941 | 0.0008137305851 |
| 1024 | -0.0009334526266 | 0.04954068189 | 0.0004593181093 |
| 2048 | 0.0002742830788 | 0.050014721551 | 0.0001472155111 |
| 4096 | -0.0002269197216 | 0.04988430047 | 0.000115699532 |
| 1000000 | 0.1353399421e-6 | 0.05000004288 | 0.4287926899e-7 |

Աղյուսակ 2-ում ներկայացված է Ֆուրիեի (6) շարքի գումարը համապատասխան շղթայական կոտորակի միջոցով հաշվման արդյունքները:

Աղյուսակ 2.

**Ֆուրիեի (6) շարքի արժեքի հաշվումը համապատասխան շղթայական կոտորակով**

| Կոտորակի օղակների քանակը | Շարքի անդամների արժեքները | Շղթայական կոտորակի գործակիցների արժեքները | Մերձավոր կոտորակների արժեքները | Սխալանքը, $\varepsilon = \left\|0.05 - \frac{P_n}{Q_n}\right\|$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.09983341665 | 0.09983341665 | 0.09983341665 | 0.04983341665 |
| 2 | -0.0993346654 | 0.9950041653 | 0.05004170838 | 0.4170837554e-4 |
| 4 | -0.09735458558 | 0.998343083 | 0.04999997219 | 0.2781086585e-7 |
| 8 | -0.08966951136 | 0.9975730286 | 0.05 | 0.113599796e-12 |
| 16 | -0.06247335019 | 0.9975148487 | 0.05 | 0.1782044426e-26 |
| 32 | 0.001824191982 | 0.9975048532 | 0.05 | 0.4222653145e-52 |
| 64 | -0.001821081326 | 0.9975027309 | 0.05 | 0.2321645728e-103 |
| 128 | -0.001808670509 | 0.9975022396 | 0.05 | 0.6940698305e-206 |
| 256 | -0.001759533571 | -1.228936371 | 0.05 | 0.75827669e-301 |

Համապատասխան շղթայական կոտորակը թույլ է տալիս Ֆուրիեի (2) շարքի արժեքը հաշվել շատ բարձր ճշտությամբ։ Մասնավոր գումարների և համապատասխան շղթայական կոտորակի միջոցով Ֆուրիեի շարքի արժեքի հաշվման համեմատական արդյունքներն իսկապես տպավորիչ է. շղթայական կոտորակները 256 օղակի դեպքում տալիս են գրեթե 300 կարգի պակաս սխալանք, քան անմիջական մասնավոր գումարների միջոցով հաշվումը։

Այսպիսով, կարելի է գալ այն եզրակացության, որ Ֆուրիեի շարքերի զուգամիտության արագացումը լիովին կարող է կատարվել համապատասխան շղթայական կոտորակների կառուցման մեթոդով, քանի որ բերված օրինակներից պարզ է դառնում, որ շղթայական կոտորակների ապարատն ունակ է տալ ավելի ու ավելի մեծ ճշգրտություն՝ փոքր սխալանքով։

## НЕКОТОРОЕ ИНТЕРЕСНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

**Костанян Н. К., Мутафян М. Н.**

В повседневной жизни и в других отраслях науки мы часто встречаемся с явлениями, в которых трудно угадать имеющиеся глубокие математические основы. Таковы музыка, которую мы слушаем, календарь, которым руководствуемся, шестеренки, применяемые в механизмах и т.д.

Работа полностью посвящена представлению нескольких интересных применений цепных дробей – одного из разделов теории чисел. Приведены применения свойств цепных дробей, используемых в физике, астрофизике, музыке и других отраслях. Сделана также небольшая подборка применения цепных дробей в деле вычисления приближенных значений и схождения рядов в математическом анализе.

**Ключевые слова:** цепная дробь, подходящая дробь, календарь, электрическая цепь, филотаксис, частота, ряд, приближение, ошибка (заблуждение), схождение.

## SOME INTERESTING APPLICATIONS OF CHAIN FRACTIONS

**Kostanyan N. K., Mutafyan M. N.**

During our everyday life and in different spheres of science we often come across phenomena that have deep roots connected with mathematics,

but we could have never imagined about it. They are as follows: the music we listen to, calendars we follow, gearwheel in mechanisms and so on.

The work is totally devoted to one of the sections of theory of numbers, i.e. the application of chain fractions. There are examples of chain fractions, adjacent fractions and the application of their properties in physics, astrophysics, music and other spheres. There is also a slight reference to the application of chain fractions in the analysis of mathematics especially in converge of a sequence and calculating approximate values.

**Keywords:** chain fractions, adjacent fractions, calendar, electric chain, phyllotaxis, frequency, chain, approximation, error, converge.

## ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Ղարագեբակյան Գ. Թվերի տեսության դասընթաց: Եր., «Էդիտ Պրինտ»: 2008: 256 էջ:
2. Арнольд В. Цепные дроби: М., МЦНМО. 2000. 40 с.
3. Бухштаб А. Теория чисел. М., «Просвещение». 1966. 384 с.
4. Селешников С. И. История календаря и хронология. М., «Наука». 1970. 33 с.
5. Хинчин А. Цепные дроби. М., ОНТИ. 1935. 104 с.
6. Устинов А.Цепные дроби вокруг нас//Квант. 2010. N 2. С. 32-33.
7. Шилов Г. Простая гамма, Устройство музыкальной шкалы. М., Гос. изд. физмат литературы. 1963. 20 с.
8. Шмойлов В. Непрерывные дроби, В 3-х т. Том 2. Расходящихся непрерывные дроби. Львов. Нац. акад. Наук Украины, ин-т прикл. проблем механики и математики. 2004. 558 с.

Տեղեկություններ հեղինակների մասին
***Կոստանյան Ն. Կ.*** *– ուսանողուհի*
*Շիրակի պետական համալսարան*
*«Գյումրու թիվ 1 ավագ դպրոց» ՊՈԱԿ մաթեմատիկայի ուսուցչուհի*
*Էլ.փոստ՝* n.kostanyan1995@mail.ru

***Մութաֆյան Մ. Ն.*** *- ֆիզմաթ գիտությունների թեկնածու, դոցենտ*
*Շիրակի պետական համալսարան*
*Գյումրու «Ֆոտոն» վարժարան*
*Էլ.փոստ՝* mmutafyan@mail.ru

*Տրվել է խմբագրության 16.10.2019*