ՇԻՐԱԿԻ Մ. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
ШИРАКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. НАЛБАНДЯНА
M. NALBANDYAN STATE UNIVERSITY OF SHIRAK
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ SCIENTIFIC PROCEEDINGS

Պրակ Բ
Выпуск Б
Issue B
2019 № 2

ՀՏԴ 37 ԴԱՍԱՎԱՆԴՄԱՆ ՄԵԹՈԴԻԿԱ

ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՀԱՐԹ ՀԱՏՈՒՅԹՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Հարությունյան Ն. Պ.

Ավագ դպրոցի երկրաչափության խնդրագրքերում, հատկապես մաթեմատիկական թեքումով հոսքերի համար նախատեսվող որոշ ձեռնարկներում հաճախ հանդիպում ենք բավականին բարդ երկրաչափական խնդիրների՝ կապված տարածական մարմինների հարթ հատույթների հետ, որոնց կառուցման գործընթացը մաթեմատիկայի շատ ուսուցիչների և աշակերտների գերակշիռ մասի անծանոթ է: Ներկայացված հոդվածը տալիս է տարածական մարմիններից բազմանիստերի հարթ հատույթների կառուցման տեսական դրույթները և գործնական քայլերը կոնկրետ օրինակի վրա:

Բանալի բառեր. բազմանիստեր, ողորկ մակերևույթներ, հարթության հետք, ներքին պրոյեկտում, օրթոգոնալ պրոյեկտում:

Հոդվածի հիմնական նպատակը մաթեմատիկայի ուսուցիչներին և ավագ դպրոցի աշակերտներին ծանոթացնելն է դպրոցական երկրաչափության համատեքստում տարածական մարմինների հարթ հատույթներին և այդ հատույթների կառուցման եղանակներին: Հատող հարթությունները կարող են առաջադրված լինել տարբեր պարամետրերով՝ մեկ ուղղի վրա չգտնվող երեք կետերով, զուգահեռ կամ հատվող ուղիղներով և այլն:

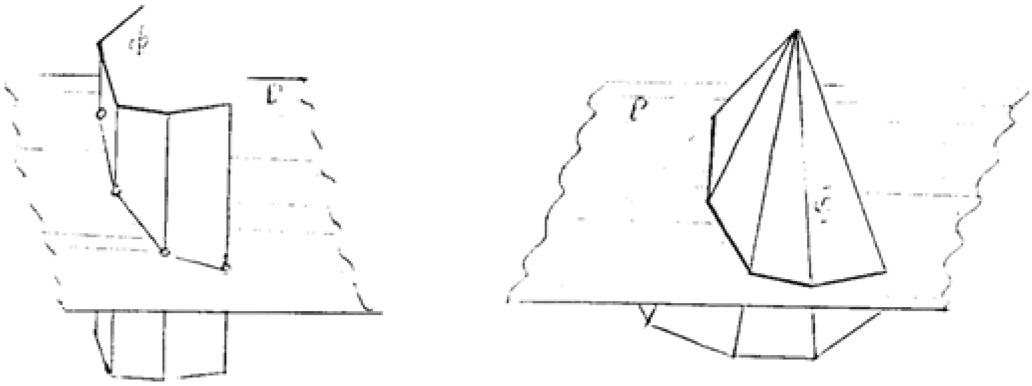
Նախաբան: Մանկավարժական բուհերի մաթեմատիկական մասնագիտությունների համար, մինչև «Բոլոնյան» կրթական համակարգին անցնելը, ուսումնական ծրագրերում նախատեսվում էր երկրաչափության հսկայածավալ բաժին՝ պատկերումների մեթոդներ, որտեղ ուսանողները (ապագա ուսուցիչները) ծանոթանում էին տարածական մարմինների աքսոնոմետրիկ պրոյեկցիաներին կամ գծապատկերներին: Նախատեսվում էր նաև թեմաներ բազմանիստերի, ողորկ մակերևույթների հարթ հատույթների մակարդակով, որոնք նպաստում էին ուսանողների տարածական պատկերացումները զարգացնելու առումով: Այս պահին այդ թեմաները համարյա չեն շոշափվում, ուստի և շրջանավարտները չեն տիրապետում թեմայի հետ առնչվող գործընթացին, որի հետևանքով էլ տուժում է նաև ավագ դպրոցի ապագա շրջանավարտը: Աշակերտների մեծ մասը բազմանիստերի հատույթների հետ կապված խնդիրները չի կարողանում լուծել հիմնականում այն պատճառով, որ չի պատկերացնում, թե հատույթում կոնկրետ ինչ պատկեր է ստացվում: Այս առումով թեման արդիական է, և ուզում ենք ներկայացնել բազմանիստերից պրիզմայի, զուգահեռանիստի և բուրգի հիմքին ոչ զուգահեռ հարթությամբ հատելուց առաջացած հատույթի կառուցման գործընթացը:

Բովանդակությունը և մեթոդիկան: Բազմանիստի հարթ հատույթը այն գիծն է կամ կետերի երկրաչափական տեղը, որոնք ընդհանուր են հատող հարթության և բազմանիստի մակերևույթի համար [7]: Հարթ հատույթը եզրագծվում է հատման գծով, որի կառուցումը կարելի է ստանալ երկու եղանակով՝

ա) որոշել հատող P հարթության և ϕ բազմանիստի (1-ին ա) նկարի վրայի պրիզմայի) կողերի հատման կետերը և դրանք հաջորդաբար իրար միացնելով,

բ) որոշել P հատող հարթության և ϕ բազմանիստի նիստերի հատման գծերը:

Բազմանիստերի հարթ հատույթները կարելի է կառուցել տարբեր եղանակներով: Դրանցից ամենահարմարները երկուսն են, որոնք կարելի է կիրառել դպրոցական երկրաչափության մեջ. առաջինը **ներքին պրոյեկտման** մեթոդն է, իսկ մյուսը **հետքերի** մեթոդը [4]: Ներքին պրոյեկտման ժամանակ օգտագործվում են լրիվ արտապատկերման պարագայում հարթ հատույթին պատկանող կետերի դիրքը, այսինքն, եթե հայտնի են նաև նրանց ուղղանկյուն (օրթոգոնալ) պրոյեկցիաները պատկերային հարթության վրա: Պրիզմաների դեպքում որպես պատկերային հարթություն՝ ընտրվում է պրիզմայի հիմքերից մեկը, իսկ բուրգի դեպքում՝ հիմքի հարթությունը:



ա) բ)

Նկ.1

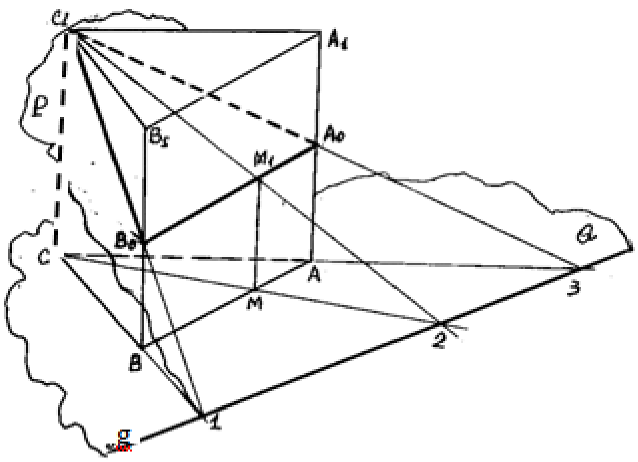
Հետքերի մեթոդի էությունը պայմանավորված է պատկերային հարթության և հատող հարթության հատման գծի որոնումով, որը կոչվում է հատող հարթության հետք պատկերային հարթության վրա, մասնավորաբար, եթե պատկերային Q հարթությունը հատվում է P հատող հարթության հետ, ապա $Q \cap P \equiv MN$, MN ուղիղը կլինի P հարթության հետքը Q-ի վրա:

Դիտարկենք բազմանիստերի հարթ հատույթներին վերաբերող օրինակները, երբ հատող հարթությունները առաջադրված են տարբեր եղանակներով, իսկ հատման գծերը որոշվում են ինչպես ներքին պրոյեկտման, այնպես էլ հետքերի մեթոդով: Նկատենք, որ այս մեթոդներով կարելի է որոշել նաև գլանի և կոնի հատույթները:

Խնդիր 1. Տրված է $ABCA_1B_1C_1$ եռանկյան ուղիղ պրիզման և P հատող հարթությունը՝ առաջադրված C_1B_0 ուղով և M_1 կետով, որտեղ B_0-ն BB_1 կողի միջնակետն է, իսկ M_1 կետը պատկանում է BB_1A_1A նիստին՝ $P(C_1B_0, M_1)$: Պահանջվում է որոշել հատող հարթության և պրիզմայի մակերևույթի հատման գիծը՝ $P(C_1B, M_1) \cap (ABCA_1B_1C_1)$:

Խնդրի լուծման ընթացքը

Խնդիրը լուծենք հետքերի մեթոդով: Դրա համար պետք է որոշել նախ $P \cap Q \equiv g$ հետքը, որից հետո՝ հատող P հարթության հատման կետը պրիզմայի AA_1 կողի հետ: Խնդրի լուծման ընթացքը՝



Նկ.2

1) Ընդունենք $Q = \varDelta ABC$ որպես պատկերային հարթություն. (նկ.2)

$CB \cap C_1B_0 \equiv 1$, C_1B_0 ուղղի հետքն է Q-ի վրա:

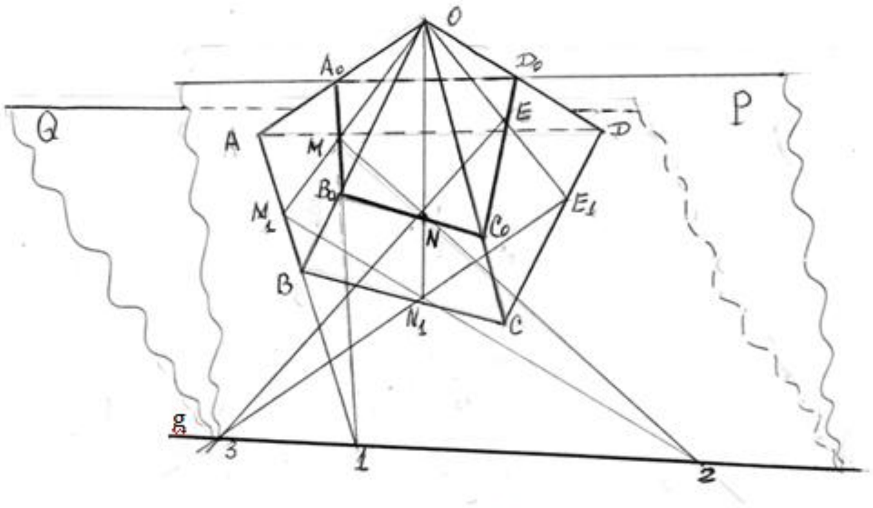
2) $CM \cap C_1M_1 \equiv 2$, C_1M_1ուղղի հետքն է Q-ի վրա:

3) $(1-2) \equiv g \equiv P \cap Q$ կլինի P հատող հարթության հետքը:

4) $CA \cap g \equiv 3$; $C_1 3 \cap AA_1 \equiv A_0$, իսկ $C_1 3 \in P, \Longrightarrow A_0 \in P$:

5) $(P \cap Q \equiv C_1A_0B_0$ կհանդիսանա հատման գիծը: Խնդիրն ուներ նաև տրիվիալ լուծում՝ B_0M_1-ը հանդիսանում է հատման գիծ այդ նիստի համար, հետևաբար $B_0M_1 \cap AA_1 \equiv A_0$: Ենթադրվում է, որ ցանկացած տարածական մարմնի (զուգահեռանիստ, պրիզմա, բուրգ, գլան, կոն և այլն) գծապատկերը լրիվ է: Գծապատկերը կոչվում է լրիվ, եթե նրան կարելի է միացնել որոշակի R ռեպեր կամ կոորդինատային համակարգ, այնպես, որ ϕ երկրաչափական պատկերի բոլոր կետերի դիրքերը կլինեն հայտնի [3, էջ 119]:

Խնդիր 2: Տրված է $OABCD$ քառանկյուն բուրգը, իսկ P հատող հարթությունը առաջադրվում է M, N, E կետերով, որոնք գտնվում են համապատասխան կողմնային նիստերի վրա՝ $M \in AOB$; $N \in BOC, E \in COD$: Որոշել $P(MNE) \cap \phi(OABCD)$ հատման գիծը:



Նկ. 3

Խնդրի լուծման գործընթացը

Որպես պատկերային Q հարթություն ընտրենք բուրգի $(ABCD)$ հիմքի հարթությունը: Կիրառենք հետքերի մեթոդը:

1) $MN \cap M_1N_1 \equiv 2$, քանի որ $M \in AOB, \Longrightarrow M_1 \in AB \in Q$,

$$N \in BOC, \Longrightarrow N_1 \in BC \in Q$$

2) $EN \cap E_1N_1 \equiv 3$, քանի որ $E \in COD, \Longrightarrow E_1 \in CD \in Q$

3) $g \equiv (3-2) \in Q$ և $g \equiv Q \cap P(MNE)$ կլինի P հարթության հետքը Q պատկերային հարթության վրա:

4) $AB \cap g \equiv 1 \Rightarrow g = (1-M) \cap OB \equiv B_0$

$AB \cap j \equiv 1; \Longrightarrow j \equiv (1-M) \cap OB \equiv B_0$, որտեղ B_0-ն հատող հարթության և OB կողի հատման կետն է: Մյուս կողերի հետ P հարթության հատման կետերը արագ կառուցվում են՝

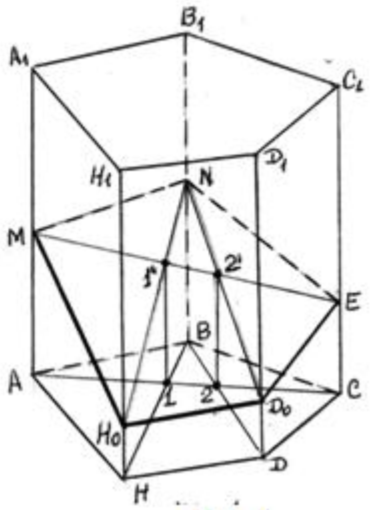
$B_0N \cap OC \equiv C_0$; $C_0E \cap OD \equiv D_0$, $B_0M \cap OA \equiv A_0$:

Հետևաբար $\phi(ABCDO) \cap P(MNE) \equiv (A_0B_0C_0D_0)$ հատման զիծն է (նկ.3):

Խնդիր 3: Տրված է կամայական ուղիղ հինգանկյուն պրիզմա և երեք կողմնային կողերի վրա կամայական $M \in AA_1, N \in BB_1$, $E \in CC_1$ կետեր: Պահանջվում է կառուցել ϕ(պրիզմա)$\cap P(MNE)$ հատման զիծը:

Խնդրի լուծման գործընթացը

Ընդունել պրիզմայի $ABCDH$ հիմքը որպես Q պատկերային հարթություն, իսկ (MNE) եռանկյան հարթությունը իբրև P հատող հարթություն: Ենթադրվում է, որ հինգանկյուն պրիզմայի գծապատկերը լրիվ է, այսինքն՝ պրիզմայի բոլոր կետերի և կողերի դիրքը որոշակի է, օգտագործենք ներքին պրոյեկտման մեթոդը և որոշենք հատման գիծը (պրոյեկտումը օրթոգոնալ է) (նկ.4):



Նկ. 4

1) $AC \cap BH \equiv 1, 1' \in ME, \Longrightarrow N1' \cap H_1H \equiv H_0 \in P$,

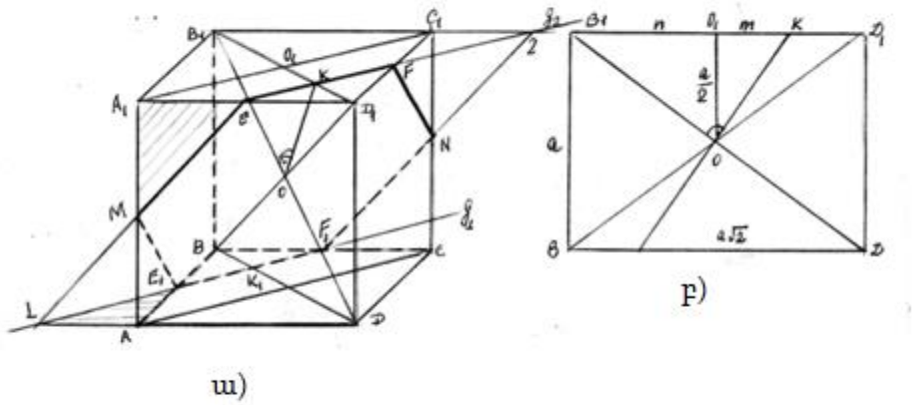
2) $AC \cap BD \equiv 2, 2' \in ME, \Longrightarrow N2' \cap DD_1 \equiv D_0 \in P$

3) Հաջորդաբար միացնելով M, N, E, D_0, H_0 կետերը՝ կստացվի հատման գիծը՝ $\phi(ABCDHA_1B_1C_1D_1H_1) \cap P \equiv j(MNED_0H_0)$:

Խնդիր 4. Գտնել a կողով խորանարդի այն հատույթի տեսքը և հատույթի մակերեսը, որն անցնում է խորանարդի անկյունագծի միջնակետով և ուղղահայաց է նրան [1; խնդիր 441]:

Խնդրի լուծման գործընթացը

$ABCDA_1B_1C_1D_1$-ը a կողով խորանարդն է:



Նկ.5

Նկար 5-ի ա) գծապատկերի վրա հատող P հարթությունը անցնում է BB_1D_1D ուղղանկյան B_1D անկյունագծի O միջնակետով և նրան ուղղահայաց, ուստի P հարթությունը կհատի այդ ուղղանկյան B_1D_1 մեծ կողմը k կետում, իսկ BD-ն k_1 կետում: Ակնհայտ է, որ խորանարդի վերին և ներքևի նիստերի հետ հատող հարթության հատման գծերը՝ k և k_1 կետերով անցնող, կլինեն զուգահեռ A_1C_1 և AC անկյունագծերին: Հատող հարթության հետքերը g_1 և g_2 ուղիղներն են: Որպեսզի կառուցենք հատող հարթության հատման կետերը AA_1 և CC_1 կողերի հետ բավական է g_1 հետքի վրա գտնել (1) կետը և $(1-E)\cap AA_1 \equiv M$, իսկ g_2-ի վրա՝ (2) կետը և $(2-F_1)\cap CC_1 \equiv N$: Այսպիսով $P \cap \phi \Longrightarrow (MEFNF_1E_1)$ վեցանկյունը: Օգտվելով նկ.5-ի բ)-ից՝ որոշենք $m = |O_1K|$ հատվածի երկարությունը:

Ուղղանկյուն եռանկյուն B_1OK-ից $(OO_1)^2 = mn,$ կամ $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = m\frac{a\sqrt{2}}{2}, \Longrightarrow m = O_1K = \frac{a\sqrt{2}}{4}, \Longrightarrow O_1K = KD_1 = \frac{O_1D_1}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$:

Մյուս կողմից $\Delta 1AE_1 = \Delta F_1BE_1$ և $\Delta 1AM = \Delta EA_1M \Longrightarrow E_1M = ME$:

Այն, որ O կետը սիմետրիայի կենտրոն է, ապա $MEFNF_1E_1$ հարթ հատույթը կանոնավոր վեցանկյուն է: Մնում է հաշվել այդ վեցանկյան մակերեսը, որը ներկայացնում է 6 հատ $EF = \frac{A_1 G_1}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ կողմով կանոնավոր եռանկյուններ:

$$S(MEFNF_1E_1) = 6 * \frac{1}{2} * \frac{a\sqrt{2}}{2} * \frac{a\sqrt{2}}{2} * \sin 60^0 = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4} :$$

Եզրակացություն: Մաթեմատիկա առարկան դասավանդող ուսուցիչները, ավագ դպրոցի աշակերտները, ծանոթանալով բազմանիստերի հարթ հատույթների կառուցման գործընթացին, ձեռք են բերում որոշակի գիտելիքներ և հմտություններ, որոնք կնպաստեն զարգացնելու իրենց տարածական պատկերացումները, խորացնելու իրենց ձեռք բերած գիտելիքները տարածաչափական խնդիրները ճիշտ ընկալելու և լուծելու գործընթացում:

ПЛОСКИЕ СЕЧЕНИЯ ПРОСТРОСТВЕННЫХ ФИГУР

Арутюнян Н. П.

В задачниках по геометрии для старшей школы, особенно для классов с математическим уклоном, часто встречаются довольно сложные геометрические задачи, связанные с плоским сечением пространственных тел, структура которых большинству учителей и учеников не знакома.

В данной статье даны теоретические основы построения плоского сечения пространственного тела многогранника и предложены практические шаги решения на конкретных примерах.

Ключевые слова: многогранники, гладкие поверхности, след плоскости, внутреннее проектирование, ортогональное проектирование.

THE PLANE SECTIONS OF SPATIAL BODIES

Harutyunyan N. P.

In the books of geometrical problems for high schools especially in manuals for schools with mathematical bias, we often come across rather complicated geometrical problems coming the plane sections of spatial bodies, the construction of which is unfamiliar to many teachers who teach Mathematics and a great number of pupils. The given article presents some theoretical principles of building spatial bodies, namely the plane sections of polyhedrons and teaches several practical skills on definite examples.

Keywords: polyhedrons, smooth surfaces, trace of a plane, internal projection, orthogonal projection.

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Առաքելյան Հ., Ավետիսյան Ռ. և ուրիշներ Խնդիրներ դիմորդների համար: Երևան: «Ճարտարագետ»: 2001: 42 էջ:
2. Աթանասյան Լ. Ս., Բուտուզով Վ. Ֆ. և ուրիշներ Երկրաչափություն -10: Երևան: «Աստղիկ» գրատուն: 2001: 142 էջ:
3. Атанасян Л. И., Базилев В. Т. Геометрия. ч. II, М. «Просвещение». 1987. 350 с.
4. Гордон В. О., Семенцов-Огиевский М. А. Курс начертательной геометрии. М. «Наука». 1971. 355 с.
5. Куликов В. П., Кузин А. В. Инженерная графика. М. изд. «Форум». 2009. 368 с.
6. Кокстер Г. С., Грейтцер С. Л. Перевод с английского. Новые встречи с геометрией. М. «Наука». 1978. 222 с.
7. Панкратов А. А. Начертательная геометрия. Пособие для студентов педагогических институтов. М. 1963. 203 с.

Տեղեկություններ հեղինակի մասին
Հարությունյան Ն. Պ. *– մանկավարժական գիտությունների թեկնածու, դոցենտ*
Շիրակի պետական համալսարան
Էլ.փոստ ՝nashik.harutyunyan@yandex.ru

Տրվել է խմբագրություն 02.09.2019