

ՀՏԴ 519:37

ԴԱՍԱՎԱՆԴՄԱՆ ՄԵԹՈԴԻԿԱ

ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ՏԻՊԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ
ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՏԱՐԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴՈՎ՝ ԸՍՏ ՊԱՐԶ
ԻՏԵՐԱՑԻԱՅԻ ՏԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ՄԽԵՄԱՅԻ: ՀԱՇՎԱՐԿԱՅԻՆ ԾՐԱԳՐԵՐԸ
MATHEMATICA ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ
Մելքոնյան Գ. Մ., Սարգսյան Ա. Հ.

Աշխատանքում ներկայացվում են ցանցերի մեթոդի կիրառմամբ էլիպտական տիպի եզրային խնդիրների համար ստացված տարբերական սխեմաների լուծման պարզ իտերացիայի մեթոդը: Կազմվում են սխեմատիկ գծագրեր, որոնք նկարագրում են այս մեթոդը և պարզաբանում դրա յուրահատկությունները: Դիտարկվում է էլիպտական տիպի դիֆերենցիալ հավասարման հանգեցվող կոնկրետ խնդիր: Կազմվում է հաշվարկային ծրագիր՝ ըստ պարզ իտերացիայի մեթոդին համապատասխան տարբերական սխեմայի, և կատարվում ուսումնասիրություն պրակտիկ զուգամիտության տեսանկյունից:

Բանալի բառեր. վերջավոր տարբերությունների մեթոդ, ցանցերի մեթոդ, էլիպտական տիպի դիֆերենցիալ հավասարում, տարբերական սխեմա, պարզ իտերացիայի մեթոդ:

1. Ներածություն: Էլիպտական տիպի դիֆերենցիալ հավասարումները մեծ կիրառություն ունեն և կիրառվում են կայուն դաշտերի նկարագրման նպատակով [1-3]: Վերջավոր տարբերությունների (ցանցերի) մեթոդը ներկայումս դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման աղյուսավետ և լայն կիրառություն ունեցող մեթոդներից է [3-7]: Այն հատկապես տարածում է ստացել վերջին ժամանակաշրջանում՝ պայմանավորված համակարգչային ծրագրերի զարգացմամբ [3,8]: Այժմ համակարգչային մաթեմատիկայի համակարգում որպես համաշխարհային առաջատար է դիտարկվում Mathematica-ն, որը կիրառվում է նաև որպես բարձրակարգ ծրագրավորման միջավայր [9-18]:

[17] աշխատանքում դիտարկվում են ցանցերի մեթոդի կիրառմամբ էլիպտական տիպի եզրային խնդիրների համար ստացված տարբերական սխեմաների լուծման Յակոբիի և Ջեյդելի մոտեցումները: [18] աշխատանքում ներկայացվում են հիպերբոլական տիպի դիֆերենցիալ հավասարումների վերջավոր տարբերությունների մեթոդով լուծման մոտեցումները ըստ բացահայտ տարբերական սխեմայի:

Սույն աշխատանքում դիտարկվում է էլիպտական տիպի դիֆերենցիալ հավասարումների՝ ըստ պարզ իտերացիայի տարբերական սխեմայի լուծման մեթոդը [3]: Մեթոդական նոր մոտեցմամբ է մեկնաբանվում ըստ պարզ իտերացիայի տարբերական սխեմայի ցանցերի մեթոդով էլիպտական տիպի դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման գործընթացը, ներկայացվում են համապատասխան սխեմատիկ պարզաբանող գծագրեր: Այդպիսի մոտեցում ցուցաբերված է նաև [17] և [18] աշխատանքներում:

Այնուհետև դիտարկվում է էլեկտրամագնիսական դաշտի ստացիոնար ալիքային գործընթացի բնութագրման Հելմհոլցի հավասարումը [1, 2]: Խնդիրը նախ լուծվում է Mathematica միջավայրի ստանդարտ միջոցների կիրառմամբ: Այնուհետև խնդրի լուծումն իրականացվում է ցանցերի մեթոդի կիրառմամբ, ներկայացվում են կազմված տարբերական սխեմաները և հաշվարկային ծրագրերը Mathematica միջավայրում՝ ըստ պարզ իտերացիայի մեթոդի: Ինչպես նաև կատարվում է ուսումնասիրություն պրակտիկ զուգամիտության տեսանկյունից և հիմնավորվում ցանցերի մեթոդի բարձր արդյունավետությունն էլիպտական տիպի դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման ժամանակ:

2. Էլիպտական տիպի դիֆերենցիալ հավասարումների համար ստացված տարբերական սխեմաների լուծման պարզ իտերացիայի մեթոդը: Դիցուք ունենք հավասարումների հետևյալ համակարգը [2, 3]՝

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

կամ $Ax = B$, որտեղ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ենթադրենք, որ հավասարումների (1) համակարգում անկյունային գործակիցները զրոյից տարբեր են, այսինքն՝ $a_{ii} \neq 0, i = \overline{1, n}$: (1) հավասարումների համակարգի առաջին, երկրորդ, ..., n-րդ հավասարումներից համապատասխանաբար կստանանք՝

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n)}{a_{11}} \\ x_2 &= \frac{b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n)}{a_{22}} \\ &\dots \\ x_n &= \frac{b_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{n(n-1)}x_{n-1})}{a_{nn}} \end{aligned}$$

կամ $x = \alpha$, որտեղ

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ & & & \dots & \\ & & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \dots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Այնուհետև անհրաժեշտ է ընտրել հավասարումների համակարգի լուծման որոշակի նախնական x^0 մոտարկում և օգտագործելով ստացված հավասարումները՝ հաջորդաբար գտնել x^1, x^2 և այլն:

Վերևում նկարագրված գործընթացն իտերացիոն գործընթաց է, որի ավարտի պայման հանդիսանում է նշված ճշտության ստացումը կամ գործընթացի ընդհատումը: Գործընթացն ընդհատվում է, երբ իտերացիաների քանակը գերազանցում է տրված թույլատրելի քանակը, այս դեպքում համակարգը չի զուգամիտում կամ իտերացիաների տրված քանակը չի բավարարում նշված ճշտության ստացման համար:

Իտերացիոն գործընթացն արտահայտող համակարգը հետևյալն է՝

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \dots + a_{1n}x_n^{(k)})}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - (a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \dots + a_{2n}x_n^{(k)})}{a_{22}} \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{b_n - (a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \dots + a_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k)})}{a_{nn}} \end{cases}$$

կամ

$$x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + \beta,$$

որտեղ փակագծերում տրված վերին ինդեքսը ներկայացնում է իտերացիայի համարը:

Այժմ անդրադառնանք էլիպտական տիպի դիֆերենցիալ հավասարումների համար ստացված տարբերական սխեմայի լուծմանը պարզ իտերացիայի մեթոդով:

Դիտարկենք էլիպտական տիպի դիֆերենցիալ հավասարումների համար ստացվող ընդհանուր տարբերական սխեմա, ընդ որում եզրային կետերի համար դիտարկենք Դիրիխլեի եզրային խնդիրը (Նեյմանի եզրային խնդրի դեպքում դատողությունները կատարվում են համանման կերպով):

Համաձայն պարզ իտերացիայի մեթոդի՝ (1) համակարգի $Ax = B$ տեսքը կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ՝

$$\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau} + Ax^{(k)} = B,$$

որտեղ $x^{(k)}$ -ն ընթացիկ մոտարկումն է, $x^{(k+1)}$ -ը՝ հաջորդ, $\tau \neq 0$ ֆիքսված թիվ է, որը կոչվում է իտերացիայի պարամետր: Յուրաքանչյուր հաջորդ մոտարկում կորոշվի ըստ հետևյալ բանաձևի՝

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau(Ax^{(k)} - B) = x^{(k)} - \tau r^{(k)},$$

որտեղ $r^{(k)} = Ax^{(k)} - B$ -ն կոչվում է k -րդ մոտարկման սխալանք:

Ընդհանրացնելով կարող ենք նշել, որ հավասարումների (1) համակարգի լուծումը պարզ իտերացիայի մեթոդով կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ՝

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \tau \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right) = x_i^{(k)} - \tau r_{ij}^{(k)}$$

Այսպիսով՝ տրված հավասարումների համակարգի լուծումը պարզ իտերացիայի մեթոդով գտնելու համար նախ անհրաժեշտ է $r^{(k)} = Ax^{(k)} - B$ բանաձևի օգնությամբ հաշվել սխալանքը ընթացիկ k -րդ քայլում, այնուհետև հերթական $k+1$ -րդ քայլում $u_{m,n}^{(k+1)} = u_{m,n}^{(k)} - \tau r_{m,n}^{(k)}$ բանաձևի օգնությամբ որոշել ցանցի հանգույցներում ֆունկցիայի արժեքները: Իտերացիայի τ պարամետրը որոշվում է $\tau \leq h^2/4$ պայմանից: Վերջինիս մեծագույն արժեքի դեպքում

վերը նշված հաշվարկային բանաձևը համընկնում է Յակոբիի մեթոդի բանաձևի հետ, իսկ ստացված արդյունքները՝ Յակոբիի մեթոդով ստացված արդյունքների հետ:

Էլիպտական տիպի դիֆերենցիալ հավասարումների համար տարբերական սխեման ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - Cu_{i,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} = f_{ij}, & i = \overline{1,n}, j = \overline{1,N} \\ u_{i,j'} = \varphi_{i,j'}, & i' = \overline{1,m}, j' = \overline{1,M} \end{cases} \quad (2)$$

որտեղ C -ն գրոյից տարբեր հաստատուն է, f -ը և φ -ն տրված ֆունկցիաներ են, ցանցի ներքին հանգույցները նշանակված են (ij) ինդեքսներով, իսկ եզրային հանգույցները՝ $(i'j')$:

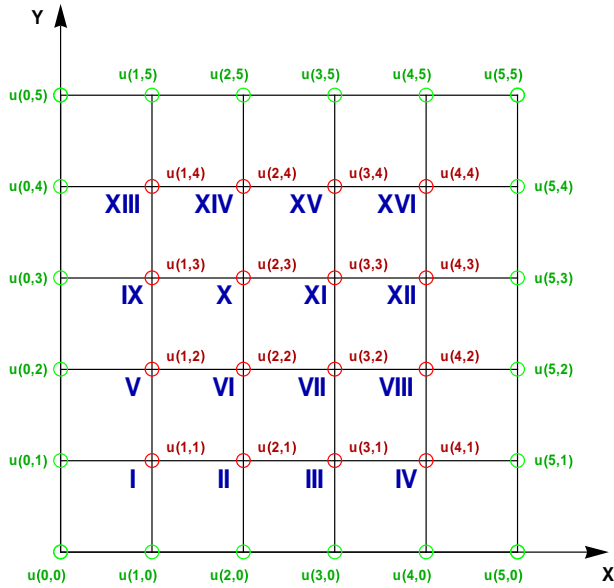
Պարզ իտերացիայի մեթոդի կիրառման դեպքում (2) տարբերական սխեմայի լուծումը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} u_{i,j}^0 = 0, & i = \overline{1,n}, j = \overline{1,N}, \\ u_{i,0}^{k+1} = u_{i,m}^{k+1} = \varphi_{i,j'}, & i' = \overline{1,m}, u_{0,j}^{k+1} = u_{M,j}^{k+1} = \varphi_{i',j'}, & j' = \overline{1,M} \\ r_{i,j}^{(k)} = f_{ij} - \frac{u_{i-1,j}^{(k)} - Cu_{i,j}^{(k)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)}}{h^2} \\ u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} - \tau r_{i,j}^{(k)} \\ i = \overline{1,n-1}, j = \overline{1,N-1}, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Այժմ պարզ իտերացիայի մեթոդի էությունը պարզաբանենք ու ներկայացնենք սխեմատիկորեն (նկ. 1): Այն արտացոլում է ցանցի հանգույցներում $u(x,y)$ ֆունկցիայի հաշվման գործընթացը: Ցանցի ներքին կետերը համարակալված են ըստ հաշվման հաջորդականության:

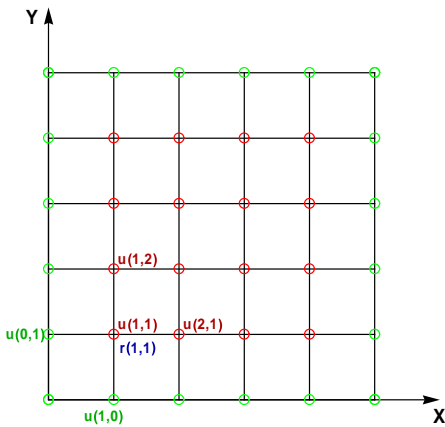
Գծագրում կանաչ գույնով ներկված հանգույցները համապատասխանում են դիֆերենցիալ հավասարման եզրային պայմաններին, իսկ կարմիր գույնով պատկերված են այն հանգույցները, որտեղ հայտնի են ֆունկցիայի արժեքները ըստ նախորդ իտերացիայի:

Այս մեթոդի կիրառման դեպքում նախ ցանցի բոլոր հանգույցներում ֆունկցիան ստանում է զրո արժեք, այնուհետև ցանցի եզրային հանգույցներում ստանում է եզրայի պայմանին համապատասխան արժեքներ, իսկ հետո սկսվում է իտերացիոն հաշվարկը ցանցի առաջին ներքին հանգույցից և շարունակվում է մինչև ցանցի վերջին ներքին հանգույցը:

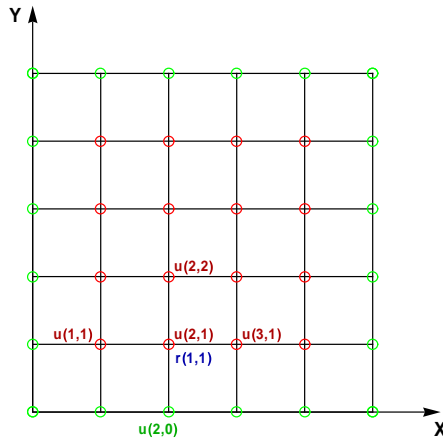


Նկ. 1

Հաշվարկը կատարվում է հետևյալ կերպ. ցանցի յուրաքանչյուր հանգույցում նախ հաշվվում է k -րդ քայլում թույլ տված $r_{i,j}$ սխալանքը, ընդ որում՝ ցանցի ներքին (i,j) հանգույցներից յուրաքանչյուրում սխալանքը որոշվում է այդ նույն քայլում ֆունկցիայի $u_{i,j-1}, u_{i-1,j}, u_{i,j}, u_{i+1,j}$ և $u_{i,j+1}$ արժեքների միջոցով, այնուհետև $u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} - \tau r_{i,j}^{(k)}$ բանաձևի միջոցով հաշվվում է $k+1$ -րդ քայլում տվյալ հանգույցում ֆունկցիայի մոտավոր արժեքը: Պատկերենք ցանցի մի քանի հանգույցներում սխալանքի որոշման ձևանմուշները՝



Նկ.2



Նկ.3

Նկ. 2-ում և նկ. 3-ում պատկերված են $r_{1,1}$ և $r_{2,1}$ սխալանքների հաշվման ձևանմուշները, որոնցից յուրաքանչյուրը կազմված է ընթացիկ հանգույցից և իր չորս հարևան հանգույցներից:

Իտերացիայի ընթացիկ քայլում $r_{i,j}$ սխալանքը որոշելու համար կիրառվում են իտերացիայի նախորդ քայլից ցանցի հինգ համապատասխան հանգույցներում ֆունկցիայի համար ստացված արժեքները: Մասնավորաբար, իտերացիայի տվյալ քայլում $r_{1,1}$ սխալանքը հաշվելու համար կիրառվում են եզրային պայմաններից հայտնի $u_{0,1}$ -ի և $u_{1,0}$ -ի արժեքները և իտերացիայի նախորդ քայլից հայտնի $u_{1,1}$ -ի, $u_{2,1}$ -ի և $u_{1,2}$ -ի արժեքները: Ցանցի ներքին բոլոր հանգույցներում սխալանքի արժեքները հաշվելուց հետո $u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} - \tau r_{i,j}^{(k)}$ բանաձևի միջոցով հաշվվում են ֆունկցիայի արժեքները ցանցի հանգույցներում իտերացիայի ընթացիկ քայլում:

3. Հելմհոլցի հավասարումը էլեկտրամագնիսական դաշտի ստացիոնար ալիքային գործընթացի համար: Խնդրի լուծումը ցանցերի մեթոդով: Դիտարկենք Հելմհոլցի հավասարումը և վերջինիս համար լուծենք Դիրիլյեի խնդիրը [3]: Հելմհոլցի հավասարումը ընդհանուր դեպքում Լապլասի օպերատորի միջոցով կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ՝

$$\Delta u(x, y) + k^2 u = f(x, y) \quad (3),$$

որտեղ $f(x, y)$ -ը էլեկտրամագնիսական դաշտի լիցքավորման խտությունը նկարագրող ֆունկցիան է:

Դիցուք հարթության վրա տրված է Հելմհոլցի հավասարումը, որի համար էլեկտրամագնիսական ալիքի տարածման հաստատունը հավասար է $\frac{\sqrt{5}}{10}$ -ի, իսկ $f(x, y) = -y^2$: Այսպես անհրաժեշտ է լուծել

$$\Delta u(x, y) + \frac{u(x, y)}{20} = -y^2 \quad (4)$$

էլիպտական տիպի դիֆերենցիալ հավասարումը

$$u(0, y) = u(4, y) = 0, \quad u(x, 0) = u(x, 4) = 0,$$

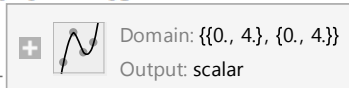
եզրային պայմանների դեպքում:

➤ **Խնդրի լուծումը Mathematica միջավայրի ստանդարտ միջոցների կիրառմամբ**

Մաթեմատիկական ֆիզիկայի և դիֆերենցիալ հավասարումների, ինչպես նաև դրանց համակարգերի թվային լուծման համար Mathematica միջավայրում նախատեսված է NDSolve օպերատորը:

Այդ օպերատորի կիրառմամբ լուծենք վերը նշված խնդիրը՝

```
Prn = NDSolve[{D[u[x,y],x,x] + D[u[x,y],y,y] + u[x,y]/20 =
= -y^2, u[x,0] == 0, u[0,y] == 0, u[4,y] == 0, u[x,4] =
= 0}, u, {x, 0, 4}, {y, 0, 4}]
```

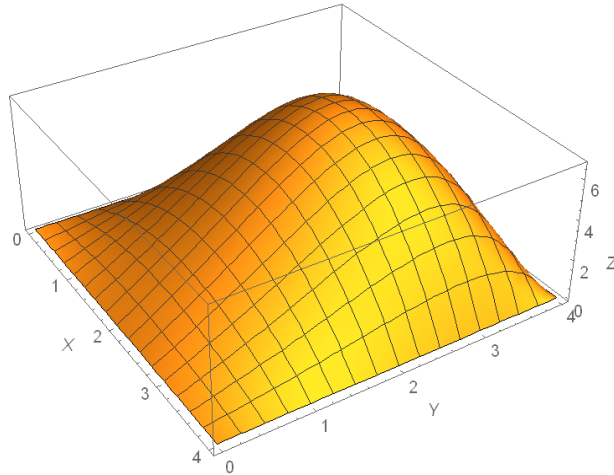


```
{{u → InterpolatingFunction[
```

Այնուհետև արդյունքները գրաֆիկորեն վիզուալացնենք .

```
Plot3D[Evaluate[u[x,y]/.Prn[[1]], {x, 0, 4}, {y, 0, 4}, AxesLabel → {X, Y, Z}]
```

Արդյունքում կստանանք նկ. 4-ում պատկերված մակերևույթը՝



Նկ. 4

➤ **Խնդրի լուծումը վերջավոր տարբերությունների մեթոդով:**

$\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$ ուղղանկյուն տիրույթում դիտարկենք $h = \frac{4}{M-1}$ քայլով

հավասարաչափ ցանց: Հաշվի առնելով առաջադրված եզրային պայմանները՝ (4) հավասարման տարբերական սխեման կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} u_{i,0} = 0, \quad u_{i,n-1} = 0, \quad i = \overline{0, m-1}, \\ u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} + \frac{u_{i,j}}{20}h^2 = -h^2j^2 \\ i = \overline{1, m-2}, \quad j = \overline{1, n-2} \\ u_{0,j} = 0, \quad u_{m-1,j} = 0, \quad j = \overline{0, n-1} \end{cases} \quad (5)$$

որի լուծումը կարելի է գտնել ինչպես ճշգրիտ, այնպես էլ թվային (մասնավորապես իտերացոն) մեթոդներով: Դիտարկենք իտերացիոն մեթոդներից պարզ իտերացիայի մեթոդը:

Պարզ իտերացիայի մեթոդի կիրառման դեպքում (5) տարբերական սխեման կբերվի հետևյալ տեսքի՝

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i,j}^0 = 0, \quad i = \overline{0, m-1}, \quad j = \overline{0, n-1} \\ u_{i,0}^{k+1} = u_{i,n-1}^{k+1} = 0, \quad i = \overline{0, m-1}, \quad u_{0,j}^{k+1} = u_{m-1,j}^{k+1} = 0, \quad j = \overline{0, n-1} \\ r_{i,j}^{(k)} = -h^2 j^2 - \frac{u_{i-1,j}^{(k)} - (80 - h^2)/20 u_{i,j}^{(k)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)}}{h^2} \\ \tau = h^2 / 4 \\ u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} - \tau r_{i,j}^{(k)} \\ i = \overline{0, m-2}, \quad j = \overline{0, n-2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (6)$$

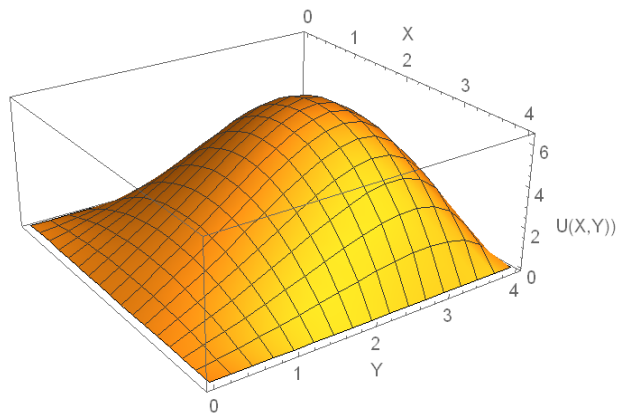
Mathematica միջավայրում պարզ իտերացիայի մեթոդով առաջադրված խնդրի լուծումն իրացնող ծրագիրը հետևյալն է՝

```

a = 0; b = 4;
m = 17; n = 17; k = 0; h = (b - a)/(m - 1); t = h^2/4; eps = 0.001; eps1
= 10;
Array[u, {m, n}, 0]; Array[v, {m, n}, 0];
Do[u[i, j] = 0, {i, 0, m - 1}, {j, 0, n - 1}];
While[eps1 > eps, k = k + 1;
  eps1 = 0;
  Do[w[i, j] = (u[i - 1, j] + u[i + 1, j] - 4u[i, j] + u[i, j - 1] + u[i, j + 1]
    + i^2 * h^4)/h^2;
  v[i, j] = u[i, j] + t * w[i, j];
  ep = Abs[t w[i, j]]; eps1 = Max[ep, eps1], {j, 1, m - 2}, {i, 1, n - 2}];
  Do[u[i, j] = v[i, j], {j, 1, m - 2}, {i, 1, n - 2}];
  U = Array[u, {m, n}, 0];
  em = 6 - u[8, 8];
  Print["k = ", k, " Total = ", em];
  Gr1 = ListPlot3D[U, DataRange -> {{0, 4}, {0, 4}}, AxesLabel
    -> {"y", "u(x0, y)"}]
k = 248, Fehler = 0.621445866383998

```

Ծրագրի առաջին տողն ապահովում է մուտքային տվյալները, այնուհետև սկսվում է հաշվարկային գործընթացը, նախավերջին տողի միջոցով արտաձվում է հաշվարկային պրոցեսում իտերացիաների քանակը և ստացված լուծման սխալանքը, իսկ վերջին տողը թույլ է տալիս ստացված արդյունքները գրաֆիկորեն վիզուալացնել: Արդյունքում արտաձվում է $u(x, y)$ ֆունկցիային համապատասխան մակերևույթը (նկ. 5):



Նկ. 5

Նկ. 6-ում միևնույն կոորդինատական համակարգում պատկերված են տրված եզրային խնդրի համար Mathematica փաթեթի ստանդարտ միջոցների օգնությամբ ստացված մակերևույթի և ցանցի բաժանման քայլերի տարբեր արժեքների դեպքում պարզ իտերացիայի մեթոդով ստացված $u(x,y)$ ֆունկցիայի համապատասխան մակերևույթների քառորդ մասերը՝ ստացված լուծման գույգամիտությունն առավել տեսանելի դարձնելու համար: Mathematica փաթեթի ստանդարտ միջոցների օգնությամբ ստացված մակերևույթը պատկերված է կանաչ գույնով, իսկ ցանցի բաժանման քայլի 17, 21, 24 արժեքների դեպքում պարզ իտերացիայի մեթոդով ստացված մակերևույթները՝ համապատասխանաբար դեղին, կապույտ և կարմիր գույներով:

$a = 0; b = 4;$

$color[17] = Red; color[21] = Blue; color[24] = Yellow;$

$Do[n = m; k = 0; h = (b - a)/(m - 1); t = h^2/4; eps = 0.001; eps1 = 10;$

$Array[u, \{m, n\}, 0]; Array[v, \{m, n\}, 0];$

$Do[u[i, j] = 0, \{i, 0, m - 1\}, \{j, 0, n - 1\}];$

$While[eps1 > eps, k = k + 1;$

$eps1 = 0;$

$Do[w[i, j] = (u[i - 1, j] + u[i + 1, j] - 4u[i, j] + u[i, j - 1] + u[i, j + 1] + i^2 * h^4)/h^2;$

$v[i, j] = u[i, j] + t * w[i, j];$

$ep = Abs[t w[i, j]]; eps1 = Max[ep, eps1], \{j, 1, m - 2\}, \{i, 1, n - 2\}];$

$Do[u[i, j] = v[i, j], \{j, 1, m - 2\}, \{i, 1, n - 2\}];$

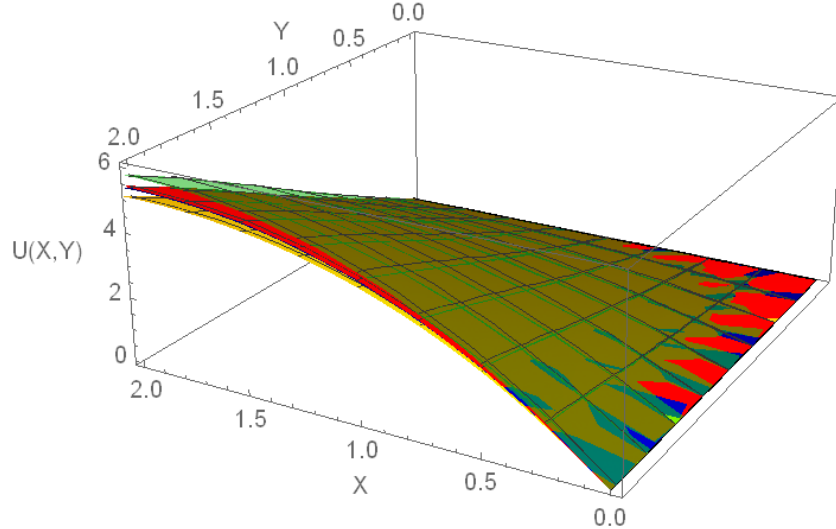
$U[m] = Array[u, \{m, n\}, 0];$

$Gr[m] = ListPlot3D[U[m], PlotStyle -> \{color[m]\}, DataRange -> \{\{0, 4\}, \{0, 4\}\},$

$\{m, \{17, 21, 24\}\}];$

```
Prn = NDSolve[{D[u[x, y], x, x] + D[u[x, y], y, y] + u[x, y]/20 =
              = -y^2, u[x, 0] == 0, u[0, y]
```

```
Gr4 = Plot3D[Evaluate[u[x, y]/.Prn[[1]]], {x, 0, 4}, {y, 0, 4}, PlotRange->
          > All,
PlotStyle-> {Opacity[0.5], Green}};
Show[{Gr[17], Gr[21], Gr[24], Gr4}, PlotRange-> {{0, 2}, {0, 2}, {0, 6}},
AxesLabel-> {"x", "y", "u(x, y)"}]
```



Նկ. 6

Արտածենք ցանցի բաժանման քայլերի տարբեր արժեքների դեպքում $u(x, y)$ ֆունկցիայի համապատասխան կորերի գրաֆիկները y կոորդինատից կախված, երբ x -ը որոշակի արժեք է ընդունել:

```
a = 0; b = 4;
```

```
Do[k = 0; h = (b - a)/(m - 1); t = h^2/4; eps = 0.001; eps1 = 10;
```

```
n = m;
```

```
Array[u, {m, n}, 0]; Array[v, {m, n}, 0];
```

```
Do[u[i, j] = 0, {i, 0, m - 1}, {j, 0, n - 1}];
```

```
While[eps1 > eps, k = k + 1;
```

```
eps1 = 0;
```

```
Do[w[i, j] = (u[i - 1, j] + u[i + 1, j] - 4u[i, j] + u[i, j - 1] + u[i, j + 1]
              + i^2 * h^4)/h^2;
```

```
v[i, j] = u[i, j] + t * w[i, j];
```

```
ep = Abs[t w[i, j]]; eps1 = Max[ep, eps1], {j, 1, m - 2}, {i, 1, n - 2}];
```

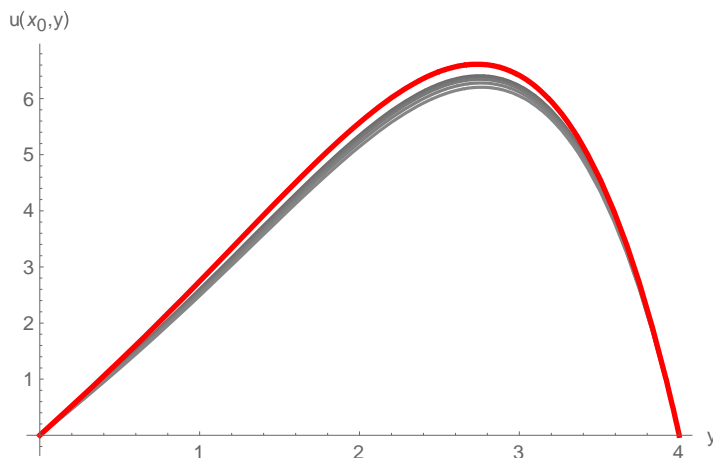
```
Do[u[i, j] = v[i, j], {j, 1, m - 2}, {i, 1, n - 2}]]];
```

```

Array[r, {m, 2}, 0];
Do[r[i, 0] = i * h, {i, 0, m - 1}];
Do[r[i, 1] = u[i, 8], {i, 0, m - 1}];
V = Array[r, {m, 2}, 0];
s = Fit[V, {x, x^2, x^3, x^4, x^5}, x];
p[m] = Plot[s, {x, 0, 4}, PlotStyle -
    > {GrayLevel[1 - 10/m]}, {m, {17, 18, 19, 20, 21}}];
Prn = NDSolve[{D[u[x, y], x, x] + D[u[x, y], y, y] + u[x, y]/20 =
    = -y^2, u[x, 0] == 0, u[0, y] == 0, u[4, y] == 0, u[x, 4] =
    = 0}, u, {x, 0, 4}, {y, 0, 4}];
pxt[x_, y_] = u[x, y]/.Prn[[1]];
Gr2 = Plot[pxt[1.7, y], {y, 0, 4}, PlotStyle -> {Red, Thickness[0.008]}];
Show[{p[17], p[18], p[19], p[20], p[21], Gr2}, PlotRange -> All
    AxesLabel -> {"y", "u(x0, y)"}]

```

Նկ. 7-ում Mathematica փաթեթի ստանդարտ միջոցների կիրառմամբ ստացված լուծման հատույթը պատկերված է կարմիր գույնով, իսկ մոխրագույնի տարբեր երանգներով պատկերված են ցանցի բաժանման քայլերի տարբեր արժեքների դեպքում պարզ իտերացիայի մեթոդով ստացված $u(x, y)$ ֆունկցիայի համապատասխան կորերի գրաֆիկները y կոորդինատից կախված և x կոորդինատի $x_0 = 2$ արժեքի դեպքում:



Նկ. 7

Այսպիսով՝ պարզ իտերացիայի մեթոդի կիրառմամբ ստացանք (5) տարբերական սխեմայի մոտավոր լուծումը **0.001** ճշտությամբ, որը

համապատասխանում է 248 իտերացիոն քայլերի: Իսկ տիրույթի բաժանման քայլերի քանակի $m = 17$ արժեքից սկսած՝ խնդրի համար պարզ իտերացիայի մեթոդով ստացված լուծումները գրեթե համընկնում են: Ընդ որում՝ $m = 17$ և $m = 18$ արժեքների դեպքում ստացված լուծումների տարբերության մոդուլը հավասար է **0.01799842**-ի:

4. Եզրակացություն: Աշխատանքում դիտարկվում են էլիպտական տիպի դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման վերջավոր տարբերությունների մեթոդը՝ ըստ պարզ իտերացիային համապատասխան տարբերական սխեմաների: Կազմված է այդ մեթոդը պարզաբանող և վիզուալ նկարագրող սխեմա, ինչը շատ օգտակար է ուսումնառողների համար: Ստացվել են հաշվարկային ծրագրեր, որոնք ոչ միայն ապահովում են նշված մեթոդով խնդիրների լուծման հաշվարկային գործընթացը՝ ապահովելով ուզած ճշտություն, այլև թույլ են տալիս արդյունքների գրաֆիկական պատկերում, ինչն արժեքավոր է և՛ թվային մեթոդների, և՛ մանկավարժական մեթոդական տեսանկյունից: Ստացված հաշվարկային ծրագրերը բավական ընդհանրական են և թույլ են տալիս եզրային այլ խնդիրների լուծումների իրականացում՝ միայն մուտքային տվյալների փոփոխությամբ:

Աշխատանքն անխոս մեթոդական կարևոր արժեք ունի, կարող է կիրառվել բուհական ուսումնական գործընթացում և ծառայել գիտական ուսումնասիրություններ կատարող գիտական աշխատողների համար:

**РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО
ТИПА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ В СООТВЕТСТВИИ С
РАЗНОСТНОЙ СХЕМОЙ ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ
ПРОГРАММЫ В СРЕДЕ МАТНЕМАТИСА**

Мелконян Г. М., Саргсян А. А.

В данной статье представлен простой итерационный метод решения разностных схем, полученных решением дифференциальных уравнений с использованием метода конечных разностей. Составлены схематические чертежи, которые описывают этот метод и проясняют его особенности. Рассматривается конкретная задача, которая приводится к дифференциальному уравнению эллиптического типа. Составлена вычислительная программа для разностной схемы, соответствующая методу простой итерации, проведено исследование с точки зрения практической сходимости.

Ключевые слова: метод конечных разностей, метод сеток, дифференциальные уравнения эллиптического типа, разностная схема, метод простой итерации.

SOLUTION OF THE ELLIPTIC TYPE DIFFERENTIAL EQUATIONS BY THE FINITE-DIFFERENCE METHOD IN ACCORDANCE WITH THE SIMPLE ITERATION DIFFERENCE SCHEME. CALCULATION PROGRAMS IN MATHEMATICA AREA

Melqonyan G. M., Sargsyan A. H.

In this paper the simple iterative approach for solving different schemes are presented, which obtained by the solving differential equations using the finite-difference method. The schematic drawings are compiled that describe this method and clarify its features. The specific problem is considered, which leads to elliptic type differential equation. Computed programs for the difference schemes in accordance to the simple iterative method are compiled, and the practical convergence is studied.

Keywords: finite difference method, grid method, differential equations of elliptic type, difference scheme, simple iteration method.

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Москва. Наука. 1977. 735 с.
2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. Учебник для физич. и механико-математ. спец. вузов. 4-е изд., испр. и доп. Москва. Наука. 1981. 512 с.
3. Шалдырван В. А., Герасимчук В. С. Методы математической физики. Учебное пособие. Москва. Вузовская книга. 2006. 512с.
4. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. Москва. Наука. 1971. 553с.
5. Ильин В. П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. Новосибирск. Издательство института математики. 2000. 345 с.
6. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. Москва. БИНОМ. 2007. 600 с.

7. Габбасов Р. Ф., Хоанг Туан Ань, Шикунов М. А. Обобщенные уравнения метода конечных разностей в задачах расчета тонких изгибаемых плит на динамические нагрузки. Проектирование и конструирование строительных систем.// Проблемы механики в строительстве. 2014. N. 9. С. 32-35.
8. Литвиненко В. П., Литвиненко Ю. В. Расчет линейных электрических цепей: учеб. пособие. Воронеж: ГОУВПО «Воронежский государственный технический университет». 2009. 243 с.
9. Аладьев В. З., Шишков М. Л. Введение в среду пакета Mathematica 2.2 Москва. Информационно-издательский дом «Филинь». 1997. 368 с.
10. Половко А. М. Mathematica для студента. Санкт-Петербург. БХВ-Петербург. 2007. 368 с.
11. Дьяконов В. П. Mathematica 516.7 Полное руководство. Москва. ДМК Пресс. 2010. 624 с.
12. Մարգարյան Ա. Հ. Mathematica փաթեթի գրաֆիկական տարրերը և դրանց դասավանդումը: Մեթոդական աշխատանք: Գյումրի: հեղ. հրատ: 2014: 88 էջ:
13. Մանուկյան Ս. Որոշյալ ինտեգրալների հաշվարկային ծրագրերը Mathematica միջավայրում ըստ ուղղանկյունների: սեղանների և պարաբոլների բանաձևերի: Ուսանողական գիտական նստաշրջանի նյութեր: Գյումրի: «Էլիոբրադո» հրատարակչություն: 2013: էջ 10-15:
14. Մարգարյան Ա. Հ., Ալեքսանյան Վ. Ա. n համասեռ մասերից բաղկացած ձողի ջերմային դաշտի խնդիրը: Հաշվարկային ծրագիրը Mathematica միջավայրում: ԳՊՄԻ-ի «Գիտական տեղեկագիր» հանդես: 2015: N1: Պրակ Ա: էջ 42-56:
15. Մարգարյան Ա. Հ., Մարգարյան Ն. Հ. Աստիճանային շարքերի կիրառումը որոշյալ և անիսկական ինտեգրալների հաշվման համար: Հաշվարկային ծրագրերը Mathematica միջավայրում: ԳՊՄԻ-ի «Գիտական տեղեկագիր» հանդես: 2015: N 1: Պրակ Բ: էջ 128-136:
16. Մարգարյան Ա. Հ., Հարությունյան Կ. Ա. Աստիճանային շարքերի կիրառումը մոտավոր հաշվումներում: Հաշվարկային ծրագիրը Mathematica միջավայրում: ՇՊՀ «Գիտական տեղեկագիր» հանդես: 2017: N1: Պրակ Բ: էջ 123-136:

17. Մելքոնյան Գ. Մ., Սարգսյան Ա. Հ. Էլիպտական տիպի դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումը վերջավոր տարբերությունների մեթոդով՝ ըստ Յակոբիի և Ջեյդելի տարբերական սխեմաների: Հաշվարկային ծրագրերը Mathematica միջավայրում: ՇՊՀ «Գիտական տեղեկագիր» հանդես: 2018: N1: Պրակ Բ: Էջ 121-140:
18. Մուրադյան Մ. Ա., Սարգսյան Ա. Հ. Հիպերբոլական տիպի դիֆերենցիալ հանգեցվող խնդիրների լուծումը վերջավոր տարբերությունների մեթոդով՝ ըստ բացահայտ տարբերական սխեմայի: Հաշվարկային ծրագրերը Mathematica միջավայրում: ՇՊՀ «Գիտական տեղեկագիր» հանդես: 2019: N1: Պրակ Բ: Էջ 24:

Տեղեկություններ հեղինակների մասին

Մելքոնյան Գ. Մ. - կրտսեր ինժեներ

«Չեսիֆայ» ՍՊԸ

Էլ. փոստ՝ melqonyangayane94@gmail.com

Սարգսյան Ա. Հ. – ֆիզմաթ գիտությունների թեկնածու, դոցենտ

Շիրակի պետական համալսարան

Էլ. փոստ՝ armenuhis@mail.ru

Տրվել է խմբագրություն 28.09.2019