ԳՅՈՒՄՐՈՒ Մ. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՄԱՆԿԱՎԱՐԺԱԿԱՆ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ГЮМРИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. М. НАЛБАНДЯНА
GYUMRI STATE PEDAGOGICAL INSTITUTE AFTER M. NALBANDYAN
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ SCIENTIFIC PROCEEDINGS

Պրակ Բ
Выпуск Б
Issue B
2013 № 2

ԴԱՍԱՎԱՆԴՄԱՆ ՄԵԹՈԴԻԿԱ

УДК 51.371

Վ.Ֆ. Մանուկյան, Գ.Ս. Նիկողոսյան

ԹՎԱՅԻՆ ԱՌԱՆՑՔԻ ՎՐԱ ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԻՐԱԿԱՆ ԱՐՄԱՏՆԵՐԻ ԴԱՍԱՎՈՐՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Բանալի բառեր՝ քառակուսի, հավասարում, թեորեմ, անհրաժեշտ, բավարար, արմատներ:

Ключевые слова: квадрат, уравнение, теорема, необходимо, достаточно, корни.

Keywords: square, equation, theorem, necessary, sufficient, roots.

Աշխատանքը նվիրված է թվային առանցքի վրա քառակուսի հավասարման իրական արմատների հնարավոր դասավորությունների որոշ դեպքերի քննարկմանը: Թեորեմների տեսքով ձևակերպված և ապացուցված են այն անհրաժեշտ և բավարար պայմանները, որոնց բավարարման դեպքում ընդհանուր տեսքի քառակուսի հավասարման իրական արմատները թվային առանցքի վրա կունենան կոնկրետ դասավորություն: Քննարկված են նաև տարբեր ոչ տիպային խնդիրներ, որոնց լուծման ընթացքում կիրառվել են ձևակերպված թեորեմները:

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում բավական խորությամբ ուսումնասիրվում է «Քառակուսի հավասարումներ» թեման: Կախված դիսկրիմինանտի նշանից՝ քննարկվում են իրական արմատների գոյության ու քանակի հետ կապված հարցեր $[1]$: Սակայն տարբեր խնդրագրքերում հաճախ հանդիպում ենք խնդիրների, որոնցում անհրաժեշտ է ուսումնասիրել քառակուսի հավասարման իրական արմատների դասավորությունը թվային առանցքի վրա $[2-5]$: Սովորաբար, նման դեպքերում աշակերտներին առաջարկվում է դիտարկել քննարկվող քառակուսային եռանդամին համապատասխանող ֆունկցիան և քննարկել վերջինիս գրաֆիկի՝ պարաբոլի բոլոր հնարավոր դիրքերը: Մենք առաջարկում ենք այլ մոտեցում:

Աշխատանքում փորձ է արվում առանձնացնել թվային առանցքի վրա քառակուսի հավասարման իրական արմատների դասավորության որոշ հնարավոր տարբերակներ և թեորեմների տեսքով նշել այն անհրաժեշտ ու բավարար պայմանները, որոնց բավարարման դեպքում քառակուսի հավասարման իրական արմատները թվային առանցքի վրա կունենան նշված դասավորությունը:

Աշխատանքում քննարկված են նաև մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում հանդիպող մի քանի ոչ տիպային խնդիրներ, որոնց լուծման ընթացքում կիրառվել են ձևակերպված թեորեմները:

Դիցուք տրված են իրական գործակիցներով

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \qquad (1)$$

քառակուսի հավասարումը (որի դիսկրիմինանտը D-ն է) և m իրական թիվը, որը (1) հավասարման արմատ չէ: Եթե (1) հավասարումն ունենա $x_1 \leq x_2$ իրական արմատներ, ապա թվային առանցքի վրա այդ արմատների և m իրական թվի համար հնարավոր են հետևյալ դասավորությունները.

I. $m < x_1 \leq x_2$;

II. $x_1 \leq x_2 < m$;

III. $x_1 < m < x_2$:

Նախ այս դեպքերը քննարկենք $m = 0$ արժեքի համար, որից հետո կքննարկենք նաև m-ի կամայական իրական արժեքի համար:

Թեորեմ 1: Որպեսզի (1) հավասարումն ունենա իրական արմատներ և այդ արմատները լինեն.

ա) դրական, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենան հետևյալ պայմանները՝ $D \geq 0;\ ab < 0;\ ac > 0$;

բ) բացասական, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենան հետևյալ պայմանները՝ $D \geq 0;\ ab > 0;\ ac > 0$;

գ) տարբեր նշանի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա $ac < 0$ պայմանը:

Ապացույց: Պարզ է, որ եթե (1) հավասարումն ունի $x_1; x_2$ դրական արմատներ, ապա $D > 0$ և, բացի այդ, համաձայն Վիետի թեորեմի, $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} > 0;\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} > 0 \Rightarrow ab < 0; ac > 0$, հետևաբար «ա» կետում նշված պայմանների անհրաժեշտությունն ապացուցված է: Այժմ անդրադառնանք բավարարությանը: $D > 0$ պայմանից կհետևի, որ (1) հավասարումն ունի երկու իրական արմատներ, $ac > 0$ պայմանից, ի նկատի ունենալով Վիետի թեորեմը, կհետևի, որ այդ իրական արմատները նույն նշանի են, իսկ $ab < 0$ պայմանից էլ, կրկին ի նկատի ունենալով Վիետի թեորեմը, կհետևի, որ այդ նույն նշանի իրական արմատները դրական են: «ա» կետն ապացուցված է:

Եթե (1) հավասարումն ունի $x_1; x_2$ բացասական արմատներ, ապա $D > 0$ և, բացի այդ, համաձայն Վիետի թեորեմի, $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} < 0;\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} > 0 \Rightarrow ab > 0; ac > 0$, հետևաբար «բ» կետում նշված պայմանների անհրաժեշտությունն ապացուցված է: Այժմ անդրադառնանք բավարարությանը: $D>0$ պայմանից կհետևի, որ (1) հավասարումն ունի երկու իրական արմատներ, $ac>0$ պայմանից, ի նկատի ունենալով Վիետի թեորեմը, կհետևի, որ այդ իրական արմատները նույն նշանի են, իսկ $ab>0$ պայմանից էլ, կրկին ի նկատի ունենալով Վիետի թեորեմը, կհետևի, որ այդ նույն նշանի իրական արմատները բացասական են: «բ» կետն ապացուցված է:

Եթե (1) հավասարումն ունի $x_1;x_2$ տարբեր նշանի արմատներ, ապա, համաձայն Վիետի թեորեմի, $x_1x_2=\frac{c}{a}<0 \;\Rightarrow\; ac<0$, հետևաբար «գ» կետում նշված պայմանի անհրաժեշտությունն ապացուցված է: Այժմ անդրադառնանք բավարարությանը: $ac<0$ պայմանից կհետևի, որ $D=b^2-4ac>0$, հետևաբար (1) հավասարումն ունի $x_1;x_2$ իրական արմատներ: Մյուս կողմից, համաձայն Վիետի թեորեմի, $x_1x_2=\frac{c}{a}<0$, հետևաբար (1) հավասարման $x_1;x_2$ իրական արմատները տարբեր նշանի են: <<գ>> կետն ապացուցված է: Թեորեմն ապացուցված է:

Այժմ քննարկենք I-III դեպքերը m-ի կամայական իրական արժեքի համար:

Թեորեմ 2: Որպեսզի (1) հավասարումն ունենա իրական արմատներ և այդ արմատները լինեն տրված m իրական թվից.

ա) մեծ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենան հետևյալ պայմանները՝ $D\geq 0;\;\; a\cdot f'(m)<0;\;\; a\cdot f(m)>0$, կամ որ նույնն է՝

$$D\geq 0;\;\; -\frac{b}{2a}>m;\;\; a\cdot f(m)>0\,;$$

բ) փոքր, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենան հետևյալ պայմանները՝ $D\geq 0;\;\; a\cdot f'(m)>0;\;\; a\cdot f(m)>0$, կամ որ նույնն է՝

$$D\geq 0;\;\; -\frac{b}{2a}<m;\;\; a\cdot f(m)>0\,:$$

Ապացույց: Դիտարկենք $g(x)=f(x+m)=ax^2+(2am+b)x+$ $+(am^2+bm+c)$ քառակուսի եռանդամը: Նկատենք, որ $f(x)=0$ և $g(x)=0$ քառակուսային հավասարումներն ունեն նույն դիսկրիմինանտը և, բացի այդ, եթե x_1-ը և x_2-ը $f(x)=0$ քառակուսային հավասարման իրական արմատներն են, ապա $x_1'=x_1-m$-ը և $x_2'=x_2-m$-ը կլինեն $g(x)=0$ քառակուսային հավասարման իրական արմատները: Ուրեմն կարող ենք պնդել, որ (1) հավասարումը կունենա տրված m իրական թվից մեծ իրական արմատներ այն և միայն այն դեպքում, երբ $g(x)=0$ քառակուսային հավասարումն ունենա դրական արմատներ, իսկ դրա համար, համաձայն թեորեմ 1-ի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենան հետևյալ պայմանները՝

$$D \ge 0;\ \ a \cdot (2am+b) = a \cdot f'(m) < 0; \qquad a \cdot \left(am^2+bm+c\right) = a \cdot f(m) > 0:$$

Ճիշտ նույն կերպ, (1) հավասարումը կունենա տրված m իրական թվից փոքր իրական արմատներ այն և միայն այն դեպքում, երբ $g(x)=0$ քառակուսային հավասարումն ունենա բացասական արմատներ, իսկ դրա համար, համաձայն թեորեմ 1-ի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենան հետևյալ պայմանները՝ $D \ge 0;\ \ a \cdot (2am+b) = a \cdot f'(m) > 0;\ \ a \cdot \left(am^2+bm+c\right) =$
$= a \cdot f(m) > 0$: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3: Որպեսզի (1) հավասարումն ունենա իրական արմատներ և այդ արմատներից մեկը մեծ լինի տրված m իրական թվից, իսկ մյուսը՝ փոքր, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա $a \cdot f(m) < 0$ պայմանը;

Ապացույց: Պարզ է, որ եթե (1) հավասարումն ունի $x_1; x_2$ իրական արմատներ այնպիսին, որ $x_1 < m < x_2$, ապա $D > 0$ և, բացի այդ, $f(x) = ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) \Rightarrow a \cdot f(m) = \quad = a^2(m-x_1)(m-x_2) < 0$, հետևաբար թեորեմի անհրաժեշտությունն ապացուցված է: Այժմ անդրադառնանք բավարարությանը: $a \cdot f(m) < 0$ պայմանից կունենանք՝

$$a^2m^2 + abm + ac < 0 \ \Rightarrow\ \frac{D}{4} = \frac{b^2-4ac}{4} > \quad > \left(am + \frac{b}{2}\right)^2 \ge 0,$$ հետևաբար (1) քառակուսի հավասարումը կունենա $x_1 < x_2$ իրական արմատներ և, ուրեմն, $a \cdot f(m) = a^2(m-x_1)(m-x_2) < 0 \Rightarrow \quad \Rightarrow (m-x_1)(m-x_2) < 0$: Փաստորեն կարող ենք պնդել, որ $m-x_1$ և $m-x_2$ արտադրիչները տարբեր նշանի են, և քանի որ $x_1 < x_2$, ուրեմն $x_1 < m < x_2$: Թեորեմն ապացուցված է:

Այժմ անցնենք մի քանի օրինակների քննարկմանը, որոնց լուծման ընթացքում կկիրառենք վերը նշած թեորեմները:

Օրինակ 1: a պարամետրի որ արժեքների դեպքում $x^2-2(a-1)x+a+5=0$ հավասարումը կունենա միայն բացասական արմատներ $[2]$:

Լուծում: Համաձայն թեորեմ 1-ի՝ տրված հավասարումը կունենա միայն բացասական արմատներ այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի կունենան հետևյալ պայմանները՝

$$\begin{cases} D/4 = (a-1)^2 - a - 5 \ge 0 \\ 2-2a > 0 \\ a+5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in (-\infty;-1) \cup (4;+\infty) \\ a \in (-\infty;1) \\ a \in (-5;+\infty) \end{cases} \Rightarrow a \in (-5;-1):$$

Պատ.՝ $a \in (-5;-1)$:

Օրինակ 2: b պարամետրի որ արժեքների դեպքում $(b+2)x^2-2bx+3b=0$

հավասարումը կունենա երկու դրական արմատ $[2]$:

Լուծում: Որպեսզի տրված հավասարումն ունենա երկու դրական արմատ, նախ պետք է այն լինի քառակուսային, այսինքն՝ $b+2\neq 0$, և, բացի այդ, պետք է բավարարվեն թեորեմ 1-ի համապատասխան պայմանները (պայմանով, որ տրված հավասարման դիսկրիմինանտը լինի դրական), այսինքն՝

$$\begin{cases} b+2\neq 0 \\ D/4=b^2-3b(b+2)>0 \\ -2b(b+2)<0 \\ 3b(b+2)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b\neq -2 \\ b\in(-3;0) \\ b\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty) \\ b\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty) \end{cases} \Rightarrow b\in(-3;-2):$$

Պատ.՝ $b\in(-3;-2)$:

Օրինակ 3: p պարամետրի որ արժեքների դեպքում $(p-2)x^2-2px+p+3=0$ հավասարման արմատները կպատկանեն $(1;3)$ միջակայքին $[3]$:

Լուծում: Երբ $p-2=0$, կունենանք՝ $p=2\Rightarrow -2x+5=0\Rightarrow x=2{,}5\in(1;3)$, իսկ երբ $p-2\neq 0$, տրված հավասարումը վերածվում է քառակուսի հավասարման, հետևաբար, թեորեմ 2-ի համաձայն, այդ քառակուսի հավասարման արմատները կպատկանեն $(1;3)$ միջակայքին այն և միայն այն դեպքում ($1<x_1\leq x_2$ և $x_1\leq x_2<3$), երբ տեղի ունենան հետևյալ պայմանները՝

$$\begin{cases} p-2\neq 0 \\ D/4=p^2-(p-2)(p+3)\geq 0 \\ -2(p-2)<0 \\ p-2>0 \\ (p-2)(4p-12)>0 \\ (p-2)(4p-15)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p\neq -2 \\ p\in(-\infty;6] \\ p\in(2;+\infty) \\ p\in(2;+\infty) \\ p\in(-\infty;2)\cup(3;+\infty) \\ p\in(-\infty;2)\cup(3{,}75;+\infty) \end{cases} \Rightarrow p\in(3{,}75;6]:$$

Այսպիսով՝ $p\in\{2\}\cup(3{,}75;6]$:

Պատ.՝ $p\in\{2\}\cup(3{,}75;6]$:

Օրինակ 4: q պարամետրի որ արժեքների դեպքում $x^2-2qx-1=0$ հավասարումը կունենա իրական արմատներ, որոնք մոդուլով չեն գերազանցի 2-ը $[4]$:

Լուծում: Որպեսզի տրված հավասարումն ունենա միայն մոդուլով 2-ը չգերազանցող իրական արմատներ, պետք է այդ հավասարումն ունենա $x_1;x_2$ իրական արմատներ այնպիսին, որ կամ $-2=x_1\leq x_2\leq 2$, կամ $-2\leq x_1\leq x_2=2$, կամ էլ $-2<x_1\leq x_2<2$:

Երբ $-2=x_1\leq x_2\leq 2\Rightarrow x_1^2-2qx_1-1=0\Rightarrow q=-0{,}75\Rightarrow x_2=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \Rightarrow |x_2|<2$, հետևաբար $q=-0{,}75$ արժեքը բավարարում է խնդրի պայմաններին:

Երբ $-2 \le x_1 \le x_2 = 2 \Rightarrow x_2^2 - 2qx_2 - 1 = 0 \Rightarrow q = 0{,}75 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \quad \Rightarrow |x_1| < 2$, հետևաբար $q = 0{,}75$ արժեքը ևս բավարարում է խնդրի պայմաններին:

Երբ $-2 < x_1 \le x_2 < 2$, թեորեմ 2-ի համաձայն ($-2 < x_1 \le x_2$ և $x_1 \le x_2 < 2$) կունենանք՝

$$\begin{cases} q^2 + 1 \ge 0 \\ -4 - 2q < 0 \\ 4 + 4q - 1 > 0 \\ 4 - 2q > 0 \\ 4 - 4q - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q \in R \\ q \in (-2;+\infty) \\ q \in (-0{,}75;+\infty) \\ q \in (-\infty;2) \\ q \in (-\infty;0{,}75) \end{cases} \Rightarrow q \in (-0{,}75;0{,}75):$$

Այսպիսով՝ $q \in [-0{,}75;0{,}75]$:

Պատ.՝ $q \in [-0{,}75;0{,}75]$:

Օրինակ 5: a պարամետրի որ արժեքների դեպքում $x^2 + 2(a-3)x + 9 - 2a = 0$ հավասարման միայն մեկ արմատը կբավարարի $x < 2$ անհավասարմանը [5]:

Լուծում: Որպեսզի տրված հավասարման միայն մեկ արմատը բավարարի $x < 2$ անհավասարմանը, պետք է այդ հավասարումն ունենա $x_1; x_2$ իրական արմատներ այնպիսին, որ կամ $x_1 = x_2 < 2$, կամ $x_1 < 2 = x_2$, կամ էլ $x_1 < 2 < x_2$:

Երբ $x_1 = x_2 < 2$, կունենանք՝ $\frac{D}{4} = (a-3)^2 - 9 + 2a = 0 \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 = 3 \not< 2 \\ x_1 = x_2 = -1 < 2 \end{array}\right.$, հետևաբար $a = 0$ արժեքը չի բավարարում, իսկ $a = 4$ արժեքը բավարարում է խնդրի պայմաններին:

Երբ $x_1 < 2 = x_2$, կունենանք՝

$x_2^2 + 2(a-3)x_2 + 9 - 2a = 0 \;\Rightarrow\; \Rightarrow a = -0{,}5 \;\Rightarrow\; x_1 = 5 \not< 2$, հետևաբար $a = -0{,}5$ արժեքը չի բավարարում խնդրի պայմաններին:

Երբ $x_1 < 2 < x_2$, թեորեմ 3-ի համաձայն կունենանք՝

$4 + 4(a-3) + 9 - 2a < 0 \Rightarrow \Rightarrow a < -0{,}5 \Rightarrow a \in (-\infty;-0{,}5)$:

Այսպիսով՝ $a \in (-\infty;-0{,}5) \cup \{4\}$:

Պատ.՝ $a \in (-\infty;-0{,}5) \cup \{4\}$:

Եզրահանգում. Ինչպես տեսնում ենք քննարկվող թեորեմները ոչ միայն կարևոր են տեսական կամ ֆորմալ առումով, այլ նաև լայն կիրառություն կարող են ունենալ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում: Ըստ էության, դրանք հնարավորություն են տալիս արդյունավետ կերպով լուծելու տարբեր տիպային և ոչ տիպային խնդիրներ՝ խուսափելով ավանդական այն մոտեցումից, երբ քառակուսի հավասարման արմատների դասավորության հետ կապված խնդիրներ լուծելիս քննարկում են տվյալ քառակուսային եռանդամին համապատասխանող ֆունկցիայի՝ պարաբոլի բոլոր հնարավոր դիրքերը:

В.Ф. Манукян, Г.С. Никогосян
О расположении действительных корней квадратного уравнения на числовой оси

Работа посвящена обсуждению некоторых возможных вариантов распределения действительных корней квадратного уравнения на числовой оси. В виде теорем сформулированы и доказаны те необходимые и достаточные условия, при удовлетворении которых действительные корны квадратного уравнения будут иметь конкретные расположения на числовой оси. Обсуждены также разные не типовые задачи, при решении которых использованы сформулированные теоремы.

V. F. Manukyan, G. S. Nikoghosyan
About the Location of the Real roots of a Quadratic Equation on a Number Axis

The work is devoted to the discussion of some of the possible options for the distribution of real roots of a quadratic equation on a number axis. The necessary and sufficient conditions are formulated and proved in the form of theorems for the satisfaction of which the real roots of a quadratic equation will have a specific distribution on the number axis. Some not typical problems, in the solutions of which the formulated theorems are used, are also discussed.

Գ ր ա կ ա ն ո ւ թ յ ո ւ ն

1. Հ. Միքայելյան, Հանրահաշիվ-9, Երևան, Էդիթ Պրինտ, 2008:
2. Прокофьев А.А., Задачи с параметрами, Москва, МИЭТ, 2004.
3. Куланин Е.Д., Норин В.П., Федин С.Н., Шевченко Ю.А., 3000 конкурсных задач по математике, Москва, Айрис-пресс, 2003.
4. Потапов М.К., Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В., Конкурсные задачи по математике, Москва, Физматлит, 2003.
5. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С., Задачи с параметрами, Киев, МП “ОКО”, 1992.

Տեղեկություններ հեղինակների մասին

Մանուկյան Վարդան Ֆրանցի - ֆիզմաթ. գիտ. թեկնածու, Գյումրու պետական մանկավարժական ինստիտուտ, E-mail: mvardan_1972@mail.ru

Նիկողոսյան Գագիկ Սերյոժայի - ֆիզմաթ. գիտ. թեկնածու, ՀՊՏՀ Գյումրու մասնաճյուղ, E-mail:gagonik@mail.ru.

Տրվել է խմբագրություն 20. 06. 2013.