ԳՅՈՒՄՐՈՒ Մ. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՄԱՆԿԱՎԱՐԺԱԿԱՆ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ГЮМРИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. М. НАЛБАНДЯНА
GYUMRI STATE PEDAGOGICAL INSTITUTE AFTER M. NALBANDYAN
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ SCIENTIFIC PROCEEDINGS

Պրակ Ա
Выпуск A
Issue A

2013 № 1

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 539.3

Л. М. Маргарян

ПОСТРОЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПРИКЛАДНОЙ МОДЕЛИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ОРТОТРОПНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ БАЛОК АСИМПТОТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Բանալի բառեր՝ դինամիկա, ասիմպտոտիկ մեթոդ, միկրոպոլյար, օրթոտրոպ, առաձգական, բարակ, ձող, մոդել:

Ключевые слова: динамика, асимптотический метод, микрополярный, ортотропный, упругий, тонкий, балка, модель.

Keywords: dynamics, asymptotic method, micropolar, orthotropic, elastic, thin, bar, model.

В данной работе на основе сингулярно-возмущенного асимптотического метода построена прикладная динамическая модель микрополярных ортотропных упругих тонких балок. На основе этой модели математически обосновывается соответствующая модель, построенная на основе метода гипотез.

1. Введение. Асимптотический метод в классической теории тонких оболочек, пластин и балок развит в работах И.И. Воровича [1], А.Л. Гольденвейзера [2], А.А. Агаловяна [3], Ю.Д. Каплунова, Л.Ю. Коссовича и Е.В. Нольде [4], Н.Н. Рогачевой [5], С.О. Саркисяна [6], Ю.А. Устинова [7] и других. Асимптотический метод в теории микрополярных балок, пластин и оболочек развит в работах С.О.Саркисяна [8-10].

В работах [11-13], на основе качественных результатов асимптотического метода интегрирования граничных задач трехмерной (двумерной) микрополярной теории упругости в тонких областях, формулированы адекватные гипотезы и построены математические модели микрополярных изотропных оболочек, пластин и балок.

В работе [14] развит асимптотический метод [8] изучения граничных задач плоской микрополярной теории упругости в тонкой прямоугольной области, построена асимптотически точная модель микрополярных изотропных упругих тонких балок и обоснована соответствующая математическая модель, построенная на основе метода гипотез [11].

В данной работе в тонкой прямоугольной области рассматривается начально-граничная задача плоской линейной микрополярной теории упругости для ортотропной балки. Развивается асимптотический подход работы [14]. Считается, что общее напряженно-деформированное состояние (НДС) можно разделить на внутреннюю задачу и погранслоя (по координатам и по времени). Асимптотическим методом построена внутренняя одномерная задача и погранслои по координатам и по времени. На основе сращивания внутренней задачи и указанных погранслоев определены соответствующие граничные и начальные условия. В итоге построена математическая модель микрополярных ортотропных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений и обосновывается соответствующая модель микрополярных балок, построенная на основе метода гипотез [15, 16].

2. Постановка задачи. Будем рассматривать прямоугольник $(0 \le x_1 \le a\,,\ -h \le x_2 \le h)$ как плоское упругое тело. Уравнения динамической задачи плоской несимметричной теории упругости для ортотропного прямоугольника имеют следующий вид [17]:

Уравнения движения:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial \mu_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial x_2} + \sigma_{12} - \sigma_{21} = I \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial t^2}. \tag{2.1}$$

Соотношения упругости:

$$\sigma_{11} = A_{11}\varepsilon_{11} + A_{12}\varepsilon_{22}, \quad \sigma_{22} = A_{12}\varepsilon_{11} + A_{22}\varepsilon_{22},$$
$$\sigma_{12} = A_{77}\varepsilon_{12} + A_{78}\varepsilon_{21}, \quad \sigma_{21} = A_{78}\varepsilon_{12} + A_{88}\varepsilon_{21}, \quad \mu_{13} = B_{66}\chi_{13}, \quad \mu_{23} = B_{44}\chi_{23}, \tag{2.2}$$

или

$$\varepsilon_{11} = \frac{A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}\sigma_{11} - \frac{A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}\sigma_{22},$$
$$\varepsilon_{22} = \frac{A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}\sigma_{22} - \frac{A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}\sigma_{11},$$
$$\varepsilon_{12} = \frac{A_{88}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}\sigma_{12} - \frac{A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}\sigma_{21}, \tag{2.3}$$
$$\varepsilon_{21} = \frac{A_{77}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}\sigma_{21} - \frac{A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}\sigma_{12},$$
$$\chi_{13} = \frac{1}{B_{66}}\mu_{13}, \quad \chi_{23} = \frac{1}{B_{44}}\mu_{23}.$$

Геометрические соотношения:

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\quad \varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\quad \varepsilon_{12}=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\omega_3,\quad \varepsilon_{21}=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\omega_3,$$
$$\chi_{13}=\frac{\partial \omega_3}{\partial x_1},\ \chi_{23}=\frac{\partial \omega_3}{\partial x_2}. \tag{2.4}$$

Здесь σ_{11}, σ_{12}, σ_{21}, σ_{22} -силовые, μ_{13}, μ_{23}-моментные напряжения; u_1, u_2 - перемещения, ω_3 - независимый поворот точек прямоугольника вокруг оси x_3; $A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{77}, A_{78}, A_{88}, B_{66}, B_{44}$ - упругие константы данного ортотропного тела; ρ -плотность, I -мера инерции этого материала при вращении.

К определяющим уравнениям (2.1)-(2.4) плоской динамической задачи микрополярной теории упругости присоединим соотвеетствующие граничные и начальные условия. На сторонах $x_2=\pm h$ прямоугольника считаются заданными силовые и моментные граничные условия (будем изучать задачу изгиба):

$$\sigma_{21}=\frac{1}{2}\left(X^+-X^-\right),\ \ \sigma_{22}=\pm\frac{1}{2}\left(Y^++Y^-\right),\ \mu_{23}=\pm\frac{1}{2}\left(M^++M^-\right). \tag{2.5}$$

На грани $x_1=0$ прямоугольника (аналогично на $x_1=a$) примем следующие варианты граничных условий несимметричной теории упругости:

1-ая граничная задача (загруженный край):

$$\sigma_{11}=\varphi_1(x_2t),\ \sigma_{12}=\varphi_2(x_2t),\ \ \mu_{13}=\varphi_3(x_2t). \tag{2.6}$$

2-ая граничная задача (защемленный край):

$$u_1=0,\quad u_2=0,\quad \omega_3=0. \tag{2.7}$$

3-ая граничная задача (шарнирное опирание):

$$\sigma_{11}=\varphi_1(x_2t),\quad u_2=0,\quad \mu_{13}=\varphi_3(x_2t). \tag{2.8}$$

Начальные условия при $t=0$ имеют следующий вид:

$$u_1\big|_{t=0}=f_1(x_1,x_2),\quad u_2\big|_{t=0}=f_2(x_1,x_2),\quad \omega_3\big|_{t=0}=\varphi_3(x_1,x_2),$$
$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0}=F_1(x_1,x_2),\ \left.\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{t=0}=F_2(x_1,x_2),\ \left.\frac{\partial \omega_3}{\partial t}\right|_{t=0}=\Phi_3(x_1,x_2). \tag{2.9}$$

3. Построение внутреннего итерационного процесса. Основные уравнения прикладной модели динамического изгиба микрополярной ортотропной упругой тонкой балки с независимыми полями перемещений и вращений. Будем предполагать, что ширина прямоугольника мала по сравнению с его длиной, т.е. $2h \ll a$, $\delta=\frac{h}{a}\ll 1$ - основной малый геометрический параметр задачи. При введении надлежащих масштабов для координат и времени уравнения несимметричной теории упругости (2.1)-(2.4) принимают форму, в которых малый параметр будет стоять перед некоторыми производными, т.е. получим сингулярновозмущенную с малым параметром начально-краевую задачу. Рассмотрим задачу сведения двумерной плоской динамической задачи несимметричной теории упругости для ортотропного тела к прикладной одномерной на основе асимптотического метода с пограничным слоем, включая вопрос об удовлетворении граничных и начальных условий. Для этой цели в двумерных динамических уравнениях (2.1)-(2.4) перейдем к безразмерным величинам и выполним замену независимых переменных - координат x_1, x_2 и времени t:

$$\xi=\frac{x_1}{a},\quad \zeta=\frac{x_2}{h},\quad \tau=\frac{t}{t_0}\quad \left(t_0=\delta^{\omega}\frac{h}{c_0}\right),$$
$$\bar{\sigma}_{ij}=\frac{\sigma_{ij}}{A_{11}},\quad \bar{\mu}_{i3}=\frac{\mu_{i3}}{aA_{11}},\quad \bar{u}_i=\frac{u_i}{a},\quad \bar{I}=\frac{I}{\delta^k\rho h^2}. \tag{3.1}$$

Здесь величина ω характеризует изменяемость напряженно-деформированного состояния во времени. В итоге получим безразмерные уравнения, в которых присутствуют следующие безразмерные физические параметры:

$$\frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2},\ \frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2},\ \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2},$$
$$\frac{A_{11}A_{88}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2},\ \frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2},\ \frac{A_{11}A_{77}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2},\ \frac{a^2A_{11}}{B_{66}},\ \frac{a^2A_{11}}{B_{44}}. \tag{3.2}$$

Решение преобразованной таким образом системы отыщем в виде асимптотического разложения (внутреннее асимптотическое разложение)

$$Q=\delta^{-q}\sum\delta^sQ^{(s)}, \tag{3.3}$$

где Q - напряжения (силовые и моментные), перемещения и поворот; q - натуральное число, которое для различных величин разное и определяется из условия получения непротиворечивой рекуррентной системы уравнений в асимптотических приближениях; s–номер асимптотического приближения.

Рассмотрим случай, когда физические безразмерные параметры (3.2) имеют следующие значения:

$$\frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sim1,\ \frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sim1,\ \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sim1,$$
$$\frac{A_{11}A_{88}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sim1,\ \frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sim1,\ \frac{A_{11}A_{77}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sim1,\ \frac{a^2A_{11}}{B_{66}}\sim1,\ \frac{a^2A_{11}}{B_{44}}\sim1. \tag{3.4}$$

В этом случае для величин $\omega,\ k,q$ получим следующие значения:

$$\omega=-1,\quad k=-2,q=\begin{cases}0 & \bar{\sigma}_{11},\ \bar{\sigma}_{22},\ \bar{u}_1,\ \bar{\mu}_{23}\\ 1 & \bar{\sigma}_{21},\ \bar{\sigma}_{12},\ \bar{u}_2,\ \bar{\mu}_{13},\ \omega_3\end{cases} \tag{3.5}$$

Имея в виду (3.5), получим основные уравнения микрополярной двумерной задачи в асимптотических приближениях:

$$\frac{\partial\bar{\sigma}_{11}^{(s-2)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\bar{\sigma}_{21}^{(s)}}{\partial\zeta}=\frac{\rho c_0^2}{A_{11}}\frac{\partial^2\bar{u}_1^{(s-2)}}{\partial\tau^2},\quad \frac{\partial\bar{\sigma}_{12}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\bar{\sigma}_{22}^{(s)}}{\partial\zeta}=\frac{\rho c_0^2}{A_{11}}\frac{\partial^2\bar{u}_2^{(s)}}{\partial\tau^2},$$
$$\frac{\partial\bar{\mu}_{13}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\bar{\mu}_{23}^{(s)}}{\partial\zeta}+\bar{\sigma}_{12}^{(s)}-\bar{\sigma}_{21}^{(s)}=\frac{\bar{I}\rho c_0^2}{A_{11}}\frac{\partial^2\omega_3^{(s)}}{\partial\tau^2}. \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial\bar{u}_1^{(s)}}{\partial\xi}=\frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\bar{\sigma}_{11}^{(s)}-\frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\bar{\sigma}_{22}^{(s)},$$
$$\frac{\partial\bar{u}_2^{(s)}}{\partial\zeta}=\frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\bar{\sigma}_{22}^{(s-2)}-\frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\bar{\sigma}_{11}^{(s-2)},$$
$$\frac{\partial\bar{u}_2^{(s)}}{\partial\xi}-\omega_3^{(s)}=\frac{A_{11}A_{88}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\bar{\sigma}_{12}^{(s)}-\frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\bar{\sigma}_{21}^{(s)}, \tag{3.7}$$
$$\frac{\partial\bar{u}_1^{(s)}}{\partial\zeta}+\omega_3^{(s)}=\frac{A_{11}A_{77}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\bar{\sigma}_{21}^{(s)}-\frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\bar{\sigma}_{12}^{(s)},$$
$$\frac{\partial\omega_3^{(s)}}{\partial\xi}=\frac{a^2A_{11}}{B_{66}}\bar{\mu}_{13}^{(s)},\quad \frac{\partial\omega_3^{(s)}}{\partial\zeta}=\frac{a^2A_{11}}{B_{44}}\bar{\mu}_{23}^{(s-2)}.$$

Рассмотрим исходное приближение $s=0$ для внутреннего итерационного процесса. Из (3.6), (3.7) получим следующие формулы:

$$\bar{u}_2^{(0)}=\overset{0}{u}{}_2^{(0)}(\xi,\tau),\qquad \omega_3^{(0)}=\overset{0}{\omega}{}_3^{(0)}(\xi,\tau),$$
$$\bar{u}_1^{(0)}=\left[-\overset{0}{\omega}{}_3^{(0)}+\frac{A_{11}A_{77}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\overset{0}{\sigma}{}_{21}^{(0)}-\frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\overset{0}{\sigma}{}_{12}^{(0)}\right]\zeta=\zeta\,\psi_1^{(0)}(\xi,\tau). \tag{3.8}$$

$$\bar{\sigma}_{21}^{(0)}=\overset{0}{\sigma}{}_{21}^{(0)}(\xi,\tau). \tag{3.9}$$

$$\bar{\mu}_{13}^{(0)}=\frac{B_{66}}{a^2A_{11}}\frac{\partial\overset{0}{\omega}{}_3^{(0)}}{\partial\xi}=\overset{0}{\mu}{}_{13}^{(0)}(\xi,\tau),$$
$$\bar{\sigma}_{12}^{(0)}=\frac{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}{A_{11}A_{88}}\left(\frac{\partial\overset{0}{u}{}_2^{(0)}}{\partial\xi}-\overset{0}{\omega}{}_3^{(0)}\right)+\frac{A_{78}}{A_{88}}\overset{0}{\sigma}{}_{21}^{(0)}=\overset{0}{\sigma}{}_{12}^{(0)}(\xi,\tau),$$
$$\bar{\sigma}_{22}^{(0)}=\left[-\frac{\partial\overset{0}{\sigma}{}_{12}^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{\rho c_0^2}{A_{11}}\frac{\partial^2\overset{0}{u}{}_2^{(0)}}{\partial\tau^2}\right]\zeta, \tag{3.10}$$

$$\overline{\sigma}_{11}^{(0)}=\left[\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^{\;2}}{A_{11}A_{22}}\frac{\partial\psi_1^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{A_{12}}{A_{22}}\left(-\frac{\partial\overset{0}{\sigma}_{12}^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{\rho c_0^{\;2}}{A_{11}}\frac{\partial^2\overset{0}{u}_2^{(0)}}{\partial\tau^2}\right)\right]\zeta=\overset{0}{\sigma}_{11}^{(0)}\zeta,$$

$$\overline{\mu}_{23}^{(0)}=\left[-\frac{\partial\overset{0}{\mu}_{13}^{(0)}}{\partial\xi}-\left(\overset{0}{\sigma}_{12}^{(0)}-\overset{0}{\sigma}_{21}^{(0)}\right)+\frac{\overline{I}\rho c_0^{\;2}}{A_{11}}\frac{\partial^2\overset{0}{\omega}_3^{(0)}}{\partial\tau^2}\right]\zeta.$$

Формулы (3.8) характеризуют кинематику деформации по внутреннему итерационному процессу. Они говорят о том, что в процессе деформации нормальный к средней линии тонкого прямоугольника элемент остается прямым, но не перпендикулярным к деформированной средней линии. В работах [11,15,16] это положение принято как кинематическая гипотеза для построения прикладной одномерной модели микрополярных изотропных и ортотропных упругих тонких балок. В указанных работах эта гипотеза названа обобщенной на микрополярный случай кинематической гипотезой Тимошенко.

Для полного определения выражения для σ_{21}, для которого пока имеем формулу (3.9), рассмотрим первое уравнение из (3.6) для $s=2$. (Отметим, что асимптотические приближения внутреннего итерационного процесса как с номером $s=1$ и, вообще, с нечетными индексами, принимаются нулевыми.) Будем иметь:

$$\frac{\partial\overline{\sigma}_{11}^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\overline{\sigma}_{21}^{(2)}}{\partial\zeta}=\frac{\rho c_0^{\;2}}{A_{11}}\frac{\partial^2\overline{u}_1^{(0)}}{\partial\tau^2}. \tag{3.11}$$

Наша цель состоит в следующем: выразить силовое напряжение σ_{21} через величины исключительно исходного асимптотического приближения $s=0$. Это можно сделать следующим образом [14]: подставляя из (3.8) и (3.10) выражения для $\overline{\sigma}_{11}^{(0)}$ и $\overline{u}_1^{(0)}$ в уравнение (3.11), после интегрирования по ζ получим:

$$\overline{\sigma}_{21}^{(2)}=\left(-\frac{\partial\overset{0}{\sigma}_{11}^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{\rho c_0^{\;2}}{A_{11}}\frac{\partial^2\psi_1^{(0)}}{\partial\tau^2}\right)\frac{\zeta^2}{2}+\overset{0}{\sigma}_{21}^{(2)}(\xi). \tag{3.12}$$

Потребуем, чтобы интеграл по ширине прямоугольника для выражения $\overline{\sigma}_{21}^{(2)}$ был равен нулю. Тогда для $\overset{0}{\sigma}_{21}^{(2)}$ будем иметь:

$$\overset{0}{\sigma}_{21}^{(2)}=\frac{1}{6}\left(\frac{\partial\overset{0}{\sigma}_{11}^{(0)}}{\partial\xi}-\frac{\rho c_0^{\;2}}{A_{11}}\frac{\partial^2\psi_1^{(0)}}{\partial\tau^2}\right). \tag{3.13}$$

Подставляя это выражение в формулу (3.12), для $\overline{\sigma}_{21}^{(2)}$ получим следующее выражение:

$$\overline{\sigma}_{21}^{(2)} = \left(\frac{1}{6} - \frac{\zeta^2}{2}\right)\left(\frac{\partial \overset{0}{\sigma}{}_{11}^{(0)}}{\partial \xi} - \frac{\rho c_0^2}{A_{11}} \frac{\partial^2 \psi_1^{(0)}}{\partial \tau^2}\right). \tag{3.14}$$

Окончательно для σ_{21} в размерном виде будем иметь:

$$\sigma_{21} = A_{11}\delta^{-1}\left[\overset{0}{\sigma}{}_{21}^{(0)} + \delta^2\left(\frac{1}{6} - \frac{\zeta^2}{2}\right)\left(\frac{\partial \overset{0}{\sigma}{}_{11}^{(0)}}{\partial \xi} - \frac{\rho c_0^2}{A_{11}} \frac{\partial^2 \psi_1^{(0)}}{\partial \tau^2}\right)\right]. \tag{3.15}$$

Остальные определяющие задачу величины, которые выражаются через величины исходного приближения, тоже представим в окончательном размерном виде:

$$w = a\delta^{-1}\overset{0}{u}{}_2^{(0)}(\xi,\tau), \quad u_1 = x_2\delta^{-1}\psi_1^{(0)} = x_2\psi_1(x_1,t), \quad \Omega_3 = \delta^{-1}\overset{0}{\omega}{}_3^{(0)}(\xi,\tau),$$

$$\sigma_{12} = A_{11}\delta^{-1}\overset{0}{\sigma}{}_{12}^{(0)}(\xi,\tau), \quad \sigma_{22} = A_{11}\overline{\sigma}_{22}^{(0)}, \quad \sigma_{11} = A_{11}\overline{\sigma}_{11}^{(0)}, \tag{3.16}$$

$$\mu_{13} = A_{11}a\delta^{-1}\overset{0}{\mu}{}_{13}^{(0)}(\xi,\tau), \quad \mu_{23} = A_{11}a\overline{\mu}_{23}^{(0)}.$$

С целью приведения двумерной задачи (2.1)-(2.9) к прикладной одномерной, что уже выполнено для силовых и моментных напряжений, деформаций, изгибов-кручений, перемещений, поворота, в теории микрополярных балок, вместо компонент тензоров силовых и моментных напряжений, вводим эквивалентные им интегральные по ширине прямоугольника характеристики- усилия и моменты:

$$N_{12} = \int_{-h}^{h} \sigma_{12} dx_2, \quad N_{21} = \int_{-h}^{h} \sigma_{21} dx_2, \quad L_{13} = \int_{-h}^{h} \mu_{13} dx_2, \quad M_{11} = \int_{-h}^{h} \sigma_{11} x_2 dx_2. \tag{3.17}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.5) с помощью формул (3.15), (3.16), в итоге приходим к одномерным динамическим уравнениям модели микрополярных ортотропных балок с независимыми полями перемещений и вращений:

Уравнения движения:

$$N_{21} - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} = h(X^+ - X^-) - \frac{2h^3}{3}\rho\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = -(Y^+ + Y^-) + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + N_{12} - N_{21} = -(M^+ + M^-) + 2Ih\frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}. \tag{3.18}$$

Соотношения упругости:

$$N_{12} = c_{77}\Gamma_{12} + c_{78}\Gamma_{21}, \quad N_{21} = c_{78}\Gamma_{12} + c_{88}\Gamma_{21},$$

$$L_{13} = d_{66}k_{13}, \quad M_{11} = D_{11}K_{11} + \frac{A_{12}}{A_{22}}\frac{h^2}{3}\left(Y^+ + Y^-\right). \tag{3.19}$$

Геометрические соотношения:

$$\Gamma_{12} = \frac{\partial w}{\partial x_1} - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \psi_1 + \Omega_3, \quad k_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1}, \quad K_{11} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}. \tag{3.20}$$

В соотношениях упругости (3.19) величины $c_{77}, c_{88}, c_{78}, d_{66}, D_{11}$, - жесткостные характеристики балки:

$$c_{77} = 2hA_{77},\ c_{88} = 2hA_{88},\ c_{78} = 2hA_{78},\ d_{66} = 2hB_{66}, D_{11} = \frac{2h^3}{3}\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}{}^2}{A_{22}}. \tag{3.21}$$

4. Построение погранслоев по координатам и времени. Сращивание асимптотических разложений. Граничные и начальные условия прикладной модели микрополярных балок. Для получения граничных условий для одномерных уравнений (3.18)-(3.21) модели микрополярных балок обратимся к изучению краевых упругих явлений. Для этого введем в уравнения (2.1)-(2.4) следующие преобразования координат x_1, x_2, времени t и перейдем к безразмерным величинам по следующим формулам (для бокового края $x_1 = 0$):

$$\begin{gathered} \xi_1 = \frac{x_1}{h}, \quad \zeta = \frac{x_2}{h}, \quad \tau = \frac{t}{t_0} \quad \left(t_0 = \delta^{\omega}\frac{h}{c_0}\right), \\ \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{A_{11}}, \quad \bar{\mu}_{i3} = \frac{\mu_{i3}}{aA_{11}}, \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{a}, \quad \bar{I} = \frac{I}{\delta^k \rho h^2}. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Решение преобразованной таким образом системы отыщем в виде асимптотического разложения

$$R = \delta^{\chi_R} \sum \delta^s R^{(s)}, \tag{4.2}$$

где R любая из величин рассматриваемой задачи; χ целое число, которое характеризует интенсивность пограничного слоя; изменяемость ω напряженно-деформированного состояния во времени должна соответствовать значению для внутренней задачи. Имея в виду (3.4), для величин χ_R, ω, k будем иметь:

$$\chi_{\sigma_{ij}} = \chi,\ \chi_{\mu_{i3}} = \chi,\ \chi_{u_i} = \chi + 1,\ \chi_{\omega_3} = \chi + 1, \quad \omega = -1, \quad k = -2. \tag{4.3}$$

После подстановки (4.3) в преобразованную систему безразмерных уравнений приходим к следующей системе уравнений погранслоя в асимптотических приближениях:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}^{(s)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{21}^{(s)}}{\partial \zeta} = \frac{\rho c_0^2}{A_{11}}\frac{\partial^2 \bar{u}_1^{(s-2)}}{\partial \tau^2}, \qquad \frac{\partial \bar{\sigma}_{12}^{(s)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}^{(s)}}{\partial \zeta} = \frac{\rho c_0^2}{A_{11}}\frac{\partial^2 \bar{u}_2^{(s-2)}}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial \bar{\mu}_{13}^{(s)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \bar{\mu}_{23}^{(s)}}{\partial \zeta} + \bar{\sigma}_{12}^{(s-1)} - \bar{\sigma}_{21}^{(s-1)} = \bar{I}\frac{\rho c_0^2}{A_{11}}\frac{\partial^2 \bar{\omega}_3^{(s-2)}}{\partial \tau^2}. \end{gathered} \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1^{(s)}}{\partial \xi_1} = \frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}{}^2}\bar{\sigma}_{11}^{(s)} - \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}{}^2}\bar{\sigma}_{22}^{(s)},$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2^{(s)}}{\partial \zeta} = \frac{A_{11}^{\ 2}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^{\ 2}} \bar{\sigma}_{22}^{(s)} - \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^{\ 2}} \bar{\sigma}_{11}^{(s)},$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2^{(s)}}{\partial \xi_1} - \omega_3^{(s-1)} = \frac{A_{11}A_{88}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^{\ 2}} \bar{\sigma}_{12}^{(s)} - \frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^{\ 2}} \bar{\sigma}_{21}^{(s)},$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1^{(s)}}{\partial \zeta} + \omega_3^{(s-1)} = \frac{A_{11}A_{77}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^{\ 2}} \bar{\sigma}_{21}^{(s)} - \frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^{\ 2}} \bar{\sigma}_{12}^{(s)}, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial \omega_3^{(s)}}{\partial \xi_1} = \frac{a^2 A_{11}}{B_{66}} \bar{\mu}_{13}^{(s)}, \qquad \frac{\partial \omega_3^{(s)}}{\partial \zeta} = \frac{a^2 A_{11}}{B_{44}} \bar{\mu}_{23}^{(s)}.$$

Как видно из (4.4), (4.5) для динамической задачи полученные уравнения представляют собой квазистатическую задачу. Это означает, что инерционные члены не входят в уравнения ряда первых приближений и задача совпадает с погранслойной задачей статики [14]. Там в свою очередь доказываются некоторые свойства решения погранслойной задачи, которые используются при сращивании асимптотических разложений внутреннего итерационного процесса и погранслоя. В результате сращивания указанных разложений получаются граничные условия для одномерных уравнений микрополярных балок [14]:

Загруженный край:

$$M_{11}\big|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h} x_2 \varphi_1 dx_2\ , \ \ N_{12}\big|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h} \varphi_2 dx_2\ , \ \ L_{13}\big|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h} \varphi_3 dx_2 . \tag{4.6}$$

Защемленный край:

$$\psi_1\big|_{x_1=0} = 0\ , \ \ w\big|_{x_1=0} = 0\ , \ \ \Omega_3\big|_{x_1=0} = 0. \tag{4.7}$$

Шарниро-опертый край:

$$M_{11}\big|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h} x_2 \varphi_1 dx_2\ , \ \ w\big|_{x_1=0} = 0\ , \ L_{13}\big|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h} \varphi_3 dx_2. \tag{4.8}$$

Для получения начальных условий для системы одномерных уравнений (3.18)-(3.21) построим погранслой по времени t, считая $t = 0$ своего рода границей, и вводим погранслойное явление около этой границы [18,19]. На основании такого подхода будем ввести в рассмотрение дополнительное НДС, имеющее по времени большую изменяемость и ту же изменяемость по координатам, которая имеет внутренняя задача. Такое НДС вызывает высокочастотные колебания по толщине балки, наиболее отчетливо проявляющееся в переходный момент времени до установившихся динамических явлений, определяемым по теории внутренней задачи. Введем в уравнения (2.1)-(2.4) преобразования координат и времени и перейдем к безразмерным величинам по формулам (3.1). Решение преобразованной таким образом системы отыщем в виде (3.3), где для величин ω , k , q получим:

$$\omega = 0, \quad k = -2, \quad q = \begin{cases} 0 & \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ \omega_3, \bar{\mu}_{13} \\ 1 & \bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{21}, \bar{\sigma}_{12}, \ \bar{\mu}_{23} \end{cases} \tag{4.9}$$

После подстановки (3.3) (с учетом (3.4), (4.9)) в преобразованную систему безразмерных уравнений получим:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{21}^{(s)}}{\partial \zeta} = \frac{\rho c_0^2}{A_{11}} \frac{\partial^2 \bar{u}_1^{(s)}}{\partial \tau^2}, \qquad \frac{\partial \bar{\sigma}_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}^{(s)}}{\partial \zeta} = \frac{\rho c_0^2}{A_{11}} \frac{\partial^2 \bar{u}_2^{(s)}}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial \bar{\mu}_{13}^{(s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\mu}_{23}^{(s)}}{\partial \zeta} + \bar{\sigma}_{12}^{(s-1)} - \bar{\sigma}_{21}^{(s-1)} = \bar{I} \frac{\rho c_0^2}{A_{11}} \frac{\partial^2 \omega_3^{(s)}}{\partial \tau^2}. \end{gathered} \tag{4.10}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial \bar{u}_1^{(s-1)}}{\partial \xi} = \frac{A_{11} A_{22}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \bar{\sigma}_{11}^{(s)} - \frac{A_{11} A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \bar{\sigma}_{22}^{(s)}, \\ \frac{\partial \bar{u}_2^{(s)}}{\partial \zeta} = \frac{A_{11}^2}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \bar{\sigma}_{22}^{(s)} - \frac{A_{11} A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \bar{\sigma}_{11}^{(s)}, \\ \frac{\partial \bar{u}_2^{(s-1)}}{\partial \xi} - \omega_3^{(s-1)} = \frac{A_{11} A_{88}}{A_{77} A_{88} - A_{78}^2} \bar{\sigma}_{12}^{(s)} - \frac{A_{11} A_{78}}{A_{77} A_{88} - A_{78}^2} \bar{\sigma}_{21}^{(s)}, \\ \frac{\partial \bar{u}_1^{(s)}}{\partial \zeta} + \omega_3^{(s-1)} = \frac{A_{11} A_{77}}{A_{77} A_{88} - A_{78}^2} \bar{\sigma}_{21}^{(s)} - \frac{A_{11} A_{78}}{A_{77} A_{88} - A_{78}^2} \bar{\sigma}_{12}^{(s)}, \\ \frac{\partial \omega_3^{(s)}}{\partial \xi} = \frac{a^2 A_{11}}{B_{66}} \bar{\mu}_{13}^{(s)}, \quad \frac{\partial \omega_3^{(s)}}{\partial \zeta} = \frac{a^2 A_{11}}{B_{44}} \bar{\mu}_{23}^{(s)}. \end{gathered} \tag{4.11}$$

Для $s = 0$ все величины определяющие задачу выражаются через $\bar{u}_1^{(0)}, \bar{u}_2^{(0)}, \omega_3^{(0)}$:

$$\begin{gathered} \bar{\sigma}_{12}^{(0)} = \frac{A_{78}}{A_{88}} \bar{\sigma}_{21}^{(0)}, \quad \bar{\sigma}_{21}^{(0)} = \frac{A_{88}}{A_{11}} \frac{\partial \bar{u}_1^{(0)}}{\partial \zeta}, \quad \bar{\sigma}_{11}^{(0)} = \frac{A_{12}}{A_{22}} \bar{\sigma}_{22}^{(0)}, \ \bar{\sigma}_{22}^{(0)} = \frac{A_{22}}{A_{11}} \frac{\partial \bar{u}_2^{(0)}}{\partial \zeta}, \\ \bar{\mu}_{13}^{(0)} = \frac{B_{66}}{a^2 A_{11}} \frac{\partial \omega_3^{(0)}}{\partial \xi}, \quad \bar{\mu}_{23}^{(0)} = \frac{B_{44}}{a^2 A_{11}} \frac{\partial \omega_3^{(0)}}{\partial \zeta}. \end{gathered} \tag{4.12}$$

А для определения $\bar{u}_1^{(0)}, \bar{u}_2^{(0)}, \omega_3^{(0)}$ из (4.10), (4.11) будем иметь следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_i^{(0)}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{a_i^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_i^{(0)}}{\partial \tau^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \omega_3^{(0)}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{a_3^2} \frac{\partial^2 \omega_3^{(0)}}{\partial \tau^2} = 0, \ i = 1,2 \tag{4.13}$$

где

$$\frac{1}{a_1} = \sqrt{\frac{\rho c_0^2}{A_{88}}}, \ \frac{1}{a_2} = \sqrt{\frac{\rho c_0^2}{A_{22}}}, \ \frac{1}{a_3} = \sqrt{\bar{I} \frac{\rho c_0^2 a^2}{B_{44}}}. \tag{4.14}$$

Важно отметить, что граничные условия (2.5) для временного погранслоя будут однородными (т.к. граничные условия (2.5) выполнены решением внутренней задачи), а начальные условия пока ставим произвольными $(i=1{,}2)$:

$$\left.\frac{\partial \bar{u}_i^{(0)}}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=\pm 1}=0, \qquad \left.\frac{\partial \omega_3^{(0)}}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=\pm 1}=0. \tag{4.15}$$

$$\overset{в.п.}{u_i}{}^{(0)}\Big|_{\tau=0}=\bar{f}_i^{*(0)}(\zeta), \qquad \overset{в.п.}{\omega_3}{}^{(0)}\Big|_{\tau=0}=\varphi_3^{*(0)}(\zeta),$$

$$\left.\frac{\partial \overset{в.п.}{u_i}{}^{(0)}}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}=\bar{F}_i^{*(0)}(\zeta), \qquad \left.\frac{\partial \overset{в.п.}{\omega_3}{}^{(0)}}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}=\Phi_3^{*(0)}(\zeta), \tag{4.16}$$

где

$$f_i^*=a\Sigma\delta^s\bar{f}_i^{*(s)},\ \ \varphi_3^*=\Sigma\delta^s\bar{\varphi}_3^{*(s)},\ F_i^*=\delta^{-1}c_0\Sigma\delta^s\bar{F}_i^{*(s)},\ \ \Phi_3^*=\frac{c_0}{h}\Sigma\delta^s\bar{\Phi}_3^{*(s)}. \tag{4.17}$$

Решив начально-граничную задачу (4.13)- (4.17), получим:

$$\bar{u}_i^{(0)}=d_1^i+d_2^i\tau+\sum_{k=1}^{\infty}\left[d_{1k}^i\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi a_i\tau\right)+d_{2k}^i\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi a_i\tau\right)\right]\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi\zeta\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[d_{3k}^i\cos(k\pi a_i\tau)+d_{4k}^i\sin(k\pi a_i\tau)\right]\cos(k\pi\zeta), \tag{4.18}$$

$$\omega_3^{(0)}=c_1^3+c_2^3\tau+\sum_{k=1}^{\infty}\left[c_{1k}^3\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi a_3\tau\right)+c_{2k}^3\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi a_3\tau\right)\right]\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi\zeta\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[c_{3k}^3\cos(k\pi a_3\tau)+c_{4k}^3\sin(k\pi a_3\tau)\right]\cos(k\pi\zeta), \tag{4.19}$$

где

$$d_1^i=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\bar{f}_i^*(\zeta)d\zeta, \qquad d_2^i=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\bar{F}_i^*(\zeta)d\zeta,$$

$$d_{1k}^i=\int_{-1}^{1}\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi\zeta\right)\bar{f}_i^*(\zeta)d\zeta, \qquad d_{3k}^i=\int_{-1}^{1}\cos(k\pi\zeta)\bar{f}_i^*(\zeta)d\zeta, \tag{4.20}$$

$$d_{2k}^i=\frac{2}{(2k-1)\pi a}\int_{-1}^{1}\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi\zeta\right)\bar{F}_i^*(\zeta)d\zeta, \quad d_{4k}^i=\frac{1}{k\pi a}\int_{-1}^{1}\cos(k\pi\zeta)\bar{F}_i^*(\zeta)d\zeta.$$

$$c_1^3=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\varphi_3^*(\zeta)d\zeta, \quad c_2^3=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\Phi_3^*(\zeta)d\zeta,$$

$$c_{1k}{}^{3} = \int_{-1}^{1} \sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi\zeta\right)\varphi_3{}^{*}(\zeta)d\zeta, \qquad c_{3k}{}^{3} = \int_{-1}^{1} \cos(k\pi\zeta)\varphi_3{}^{*}(\zeta)d\zeta, \tag{4.21}$$

$$c_{2k}{}^{3} = \frac{2}{(2k-1)\pi a}\int_{-1}^{1} \sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi\zeta\right)\Phi_3{}^{*}(\zeta)d\zeta, \qquad c_{4k}{}^{3} = \frac{1}{k\pi a}\int_{-1}^{1} \cos(k\pi\zeta)\Phi_3{}^{*}(\zeta)d\zeta.$$

Как видно из общих решений (4.18),(4.19), чтобы эти решения были чисто осциллирующими, необходимо требовать:

$$d_1^{\,i} = 0\,,\ d_2^{\,i} = 0\,,\ c_1^{\,3} = 0\,,\ c_2^{\,3} = 0\,. \tag{4.22}$$

Условия (4.22) назовем условиями осцилляции. Учитывая соответствующие формулы из (4.20), (4.21) условия осцилляции (4.22) будут выражаться так:

$$\int_{-1}^{1} f_i^{\,*}(\zeta)d\zeta = 0,\ \int_{-1}^{1} F_i^{\,*}(\zeta)d\zeta = 0,\ \int_{-1}^{1} \varphi_3{}^{*}(\zeta)d\zeta = 0,\ \int_{-1}^{1} \Phi_3{}^{*}(\zeta)d\zeta = 0. \tag{4.23}$$

Сращивая внутреннюю задачу и погранслой по времени с учетом (4.23), приходим к начальным условиям для одномерных уравнений (3.18)-(3.21):

$$\psi_1\big|_{t=0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=h} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=-h}\right), \qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=h} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=-h}\right),$$

$$w\big|_{t=0} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f_2(x_1,x_2)dx_2\,, \qquad \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} F_2(x_1,x_2)dx_2, \tag{4.24}$$

$$\Omega_3\big|_{t=0} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \varphi_3(x_1,x_2)dx_2, \qquad \frac{\partial \Omega_3}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \Phi_3(x_1,x_2)dx_2.$$

Таким образом, на основе асимптотического метода построена математическая модель динамического изгиба микрополярных ортотропных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений: уравнения движения (3.18), физические соотношения (3.19), (3.21) геометрические соотношения (3.20), граничные условия (4.6) (либо (4.7), (4.8)) и начальные условия (4.24).

5. Сравнение моделей прикладной одномерной теории изгиба микрополярных упругих тонких балок построенной на основе асимптотического метода и метода гипотез. Как уже было отмечено выше, в работах [11-13,15,16] прикладная одномерная модель балок, пластин и оболочек построена на основе метода гипотез. Принятые гипотезы для микрополярных балок имеют следующие содержания:

1) нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к оси симметрии, остается после деформации прямолинейным, свободно вращается на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины и не оставаясь перпендикулярным к деформированной оси.

Вследствие этого имеем линейный закон изменения перемещений u_1, u_2 и свободного поворота Ω_3:

$$u_1 = x_2 \psi_1(x_1, t), \quad u_2 = w(x_1, t), \quad \omega_3 = \Omega_3(x_1, t), \tag{5.1}$$

где ψ_1 – полный угол поворота нормального элемента, w – прогиб балки, Ω_3 – угол свободного поворота;

2) при определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений для силового напряжения σ_{21} сначала примем

$$\sigma_{21} = \overset{0}{\sigma}_{21}(x_1, t). \tag{5.2}$$

После определения указанных величин, значение σ_{21} окончательно определим как сумму значения (5.2) и результата интегрирования первого уравнения движения из (2.1), для которого потребуем, чтобы усредненная по ширине прямоугольника ее величина была равна нулю.

Введя сравнивание, убеждаемся, что эти гипотезы соответствуют свойствам асимптотического решения начально-краевой задачи (2.1)-(2.9) плоской микрополярной теории упругости в тонкой прямоугольной области.

Теперь будем сравнивать основные уравнения, граничные и начальные условия прикладной одномерной модели микрополярных упругих тонких балок ((3.18)-(3.21), (4.6)-(4.8), (4.24)) с основными уравнениями, граничными и начальными условиями той же модели построенной на основе метода гипотез [15,16]. Как убеждаемся, разница лишь в выражении момента M_{11}: речь идет о величине $\frac{A_{12}}{A_{22}} \frac{h^2}{3}\left(Y^+ + Y^-\right)$, которая присутствует в формуле (3.19) и которая отсутствует в аналогичной формуле работ [15,16]. Это результат того, что по асимптотическому методу в формуле обобщенного закона Гука (2.3) для величины ε_{11} силовое напряжение σ_{22} не пренебрегается относительно силового напряжения σ_{11}, но по методу гипотез, как и в классической теории, такое пренебрегание оправдано. Отметим, что численные результаты тоже подтверждают это пренебрегание.

Таким образом, можем констатировать, что построенная прикладная одномерная модель микрополярных упругих тонких балок построенной в работах [15,16] представляет собой асимптотически точную модель.

Լ.Մ. Մարգարյան

Միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական բարակ ձողերի դինամիկական կիրառական մոդելի կառուցումն ասիմպտոտիկ մեթոդով

Աշխատանքում սինգուլյար-գրգռման ասիմպտոտիկ մեթոդի հիման վրա կառուցված է միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական բարակ ձողերի կիրառական դինամիկ մոդելը: Այս մոդելի միջոցով մաթեմատիկորեն հիմնավորվում է վարկածների մեթոդի հիման վրա կառուցված համապատասխան մոդելը:

L.M. Margaryan

Construction of Dynamic Aapplied Model of Micropolar Orthotropic Elastic Thin Bars with the Asymptotic Method

In the present paper applied dynamic model of micropolar orthotropic elastic bars is constructed on the basis of the singularly perturbed asymptotic method. On the basis of this model corresponding model, constructed on the basis of the hypotheses method, is mathematically justified.

Литература

1. Ворович И.И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек.//Сб.: Материалы I Всесоюзной школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Тбилиси: изд-во Тбилисск.ун-та. 1975. С. 51-149.
2. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. Москва: Наука. 1976. 510с.
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. Москва: Наука. 1997. 414с.
4. Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. Academic Press. 1998. 225p.
5. Rogacheva N.N. The Theory of Piezoelectric Plates and Shells. Boca Ration: SRS Press. 1994. 260p.
6. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: изд-во АН Армении. 1992. 232с.
7. Устинов Ю.А. Некоторые свойства однородных решений неоднородных плит.// Доклады АН СССР. 1974. Т. 216. N4. С. 755-758.
8. Саркисян С.О. Прикладные одномерные теории балок на основе несимметричной теории упругости.//Физическая мезомеханика. 2008. Том 11. N5. С. 41-54.
9. Саркисян С.О. Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости.//Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. N1. С.129-147.
10. Саркисян С.О. Теория микрополярных упругих тонких оболочек.// Прикладная математика и механика. 2012.Том76. Вып.2. С.325-343.
11. Sargsyan S.H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars.//Journal of Materials Science and Engineering. 2012. Vol. 2. N1. P.98-108.
12. Саркисян С.О. Общие математические модели микрополярных упругих тонких пластин.//Известия НАН Армении.Механика.2011.Т.64. N1. с.58-67.
13. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек.// Доклады АН России. 2011. Том 436. N2. С.195-198.
14. Саркисян С.О. Построение математической модели микрополярных упругих тонких балок асимптотическим методом.// Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2012. N 5. С. 31-37.

15. Sargsyan S.H., Margaryan L.M. Mathematical Model of Dynamics of Micropolar Orthotropic Elastic Thin Bars with Free Fields of Displacements and Rotations.//Journal of Mechanics Engineering and Automation. 2012. Vol. 2. P. 110-118.
16. Маргарян Л.М., Саркисян С.О. Математические модели динамики микрополярных анизотропных (ортотропных) упругих тонких балок.// Известия НАН Армении. Механика. 2012. Том 65. N1. С. 17-28.
17. Iesen D. The plane micropolar strain of orthotropic elastic solids.//Archives of Mechanics. 1973. Vol. 5. N3. P. 547-561.
18. Гусейн-Заде М.И. Асимптотический анализ трехмерных динамических уравнений тонкой пластинки // Прикладная математика и механика. 1974. Том 38. Вып. 6. С. 1072-1078.
19. Гусейн-Заде М.И. Асимптотический анализ граничных и начальных условий в динамике тонких пластинок// Прикладная математика и механика. 1978. Том 42. Вып. 5. С. 899-907.

Сведения об авторе:
Маргарян Лилит Мкртичовна – *кандидат физ.-мат наук, асистент каф. алгебры и географии Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна.*
E-mail: m.liloo@mail.ru

Поступило в редакцию 07.05.2012