ԳՅՈՒՄՐՈՒ Մ. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՄԱՆԿԱՎԱՐԺԱԿԱՆ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ГЮМРИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. М. НАЛБАНДЯНА
GYUMRI STATE PEDAGOGICAL INSTITUTE AFTER M. NALBANDYAN
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ SCIENTIFIC PROCEEDINGS

Պրակ Ա
Выпуск А
Issue A

2013 № 1

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 539.3

Ш. И. Алваджян

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ОРТОТРОПНЫХ ТОНКИХ БАЛОК АСИМПТОТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Բանալի բառեր՝ միկրոպոլյարություն, օրթոտրոպություն, առաձգականություն, բարակ ձող, կիրառական մոդել:

Ключевые слова: микрополярность, ортотропия, упругость, тонкая балка, прикладная модель.

Keywords: micropolar, orthotropy, elasticity, thin bars, applied model.

В данной работе развит асимптотический метод интегрирования микрополярной теории упругости для ортотропного материала в случае плоского напряженного состояния в области тонкого прямоугольника, построена прикладная - одномерная теория микрополярных ортотропных упругих тонких балок и, по существу, обосновывается модель микрополярных ортотропных балок, построенная на основе метода гипотез.

Введение. Асимптотический метод построения математических моделей балок, пластин и оболочек на основе классической теории упругости развит в работах И.И.Воровича [1] и А.Л.Гольденвейзера [2], их учеников и коллег: Л.А.Агаловяна [3], Ю.Л.Каплунова, Л.Ю.Коссовича и Е.В.Нольде [4], Н.Н.Рогачевой [5], С.О.Саркисяна [6], Ю.А.Устинова, М. А. Шленева [7] и др.

Асимптотический метод в теории микрополярных упругих балок, пластин и оболочек развит в работах С.О. Саркисяна [8-10]. В работах [11-13] С.О. Саркисяном принят такой подход: используя качественные результаты асимптотического метода, были формулированы гипотезы, на основе которых построены прикладные теории микрополярных упругих изотропных тонких балок, пластин и оболочек.

В работе [14] развивается асимптотический поход и дается обоснование математической модели микрополярных упругих изотропных балок построенной на основе метода гипотез в работе [11].

В данной работе используя асимптотический метод [14,15] построена асимптотическая модель микрополярных упругих ортотропных балок и дано обоснование аналогичной модели построенной в работе [16] методом гипотез.

1. Постановка задачи. Рассмотрим ортотропный прямоугольник постоянной толщины $2h \left(0 \le x_1 \le a,\ \ -h \le x_2 \le h\right)$. Будем исходить из основных уравнений плоской задачи микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [8,17]:

уравнения равновесия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} = 0, \qquad \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0, \\ \dfrac{\partial \mu_{13}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \mu_{23}}{\partial x_2} + \sigma_{12} - \sigma_{21} = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

физические соотношения

$$\begin{cases} \sigma_{11} = A_{11}\varepsilon_{11} + A_{12}\varepsilon_{22}, \quad \sigma_{22} = A_{12}\varepsilon_{11} + A_{22}\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{12} = A_{77}\varepsilon_{12} + A_{78}\varepsilon_{21}, \\ \sigma_{21} = A_{78}\varepsilon_{12} + A_{88}\varepsilon_{21}, \\ \mu_{13} = B_{66} \cdot \chi_{13}, \quad \mu_{23} = B_{44} \cdot \chi_{23} \end{cases} \tag{1.2}$$

либо в обратной форме

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}\sigma_{11} - \dfrac{A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}\sigma_{22}, \\ \varepsilon_{22} = -\dfrac{A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}\sigma_{11} + \dfrac{A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}\sigma_{22}, \\ \varepsilon_{12} = \dfrac{A_{88}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}\sigma_{12} - \dfrac{A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}\sigma_{21}, \\ \varepsilon_{21} = -\dfrac{A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}\sigma_{12} - \dfrac{A_{77}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}\sigma_{21}, \\ \chi_{13} = \dfrac{1}{B_{66}} \cdot \mu_{13}, \quad \chi_{23} = \dfrac{1}{B_{44}} \cdot \mu_{23} \end{cases} \tag{1.3}$$

геометрические соотношения

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}, \qquad \varepsilon_{22} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}, \\ \varepsilon_{12} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \omega_3, \quad \varepsilon_{21} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_3, \\ \chi_{13} = \dfrac{\partial \omega_3}{\partial x_1}, \qquad \chi_{23} = \dfrac{\partial \omega_3}{\partial x_2}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Здесь, $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}$ - силовые напряжения; μ_{13}, μ_{23} - моментные напряжения; u_1, u_2 - линейные перемещения; ω_3 - независимый поворот точек прямоугольника вокруг оси x_3, A_{ij} $(i, j = 1;2;\ i, j = 7;8)$, B_{66}, B_{44} -упругие константы материала тела.

Ниже будем изучать антисимметричную по координате x_2 задачу, т.е. задачу изгиба.

На лицевых сторонах прямоугольника $x_2 = \pm h$ будем считать заданными силовые и моментные напряжения:

$$\sigma_{21} = \frac{1}{2}\left(X^+ - X^-\right), \quad \sigma_{22} = \pm\frac{1}{2}\left(Y^+ + Y^-\right), \quad \mu_{23} = \pm\frac{1}{2}\left(M^+ + M^-\right) \tag{1.5}$$

На боковых кромках прямоугольника ($x_1 = 0$ и $x_1 = a$) примем следующие варианты граничных условий:

a) $\sigma_{11} = \varphi_1(x_2), \quad \sigma_{12} = \varphi_2(x_2), \quad \mu_{13} = \varphi_3(x_2)$. (задача 1) (1.6)

b) $\sigma_{11} = \varphi_1(x_2), \quad u_2 = 0, \quad \mu_{13} = \varphi_3(x_2)$. (задача 2) (1.7)

c) $u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \omega_3 = 0$. (задача 3) (1.8)

Отметим, что при $A_{77} = A_{88} = A_{78}$ и $B_{66} = B_{44} = 0$ из граничной задачи (1.1)-(1.8) получится уравнения и граничные условия плоской задачи классической теории упругости.

Будем считать, что рассмотренная область прямоугольника тонкая, т.е. $\delta = \dfrac{h}{a} << 1$; $\delta -$основной геометрический малый параметр задачи.

Придерживаясь основополагающего принципа асимптотического метода интегрирования сингулярно – вырождающихся систем дифференциальных уравнений в тонкой области, в основу рассуждений будем полагать свойство напряженно-деформируемого состояния (НДС),испытывающего статическое воздействие, выражаемое структурной формулой:

$(НДС)_{полн}=(НДС)_{вн}+(НДС)_{кр}$. (1.9)

В этом равенстве краевое НДС прямоугольника возникает вблизи боковых граней прямоугольника ($x_1 = 0,\ x_1 = a$) и быстро (экспоненциально) затухает при удалении от них вглубь двумерной области прямоугольника. Что касается внутреннего НДС, то оно в каждом асимптотическом приближении будет описываться дифференциальными уравнениями меньшей размерности (в данном случае – обыкновенными дифференциальными уравнениями).

При определении внутреннего и краевого НДС в прямоугольнике большую роль играют значения физических констант микрополярного материала прямоугольника. С этой точки зрения введем следующие безразмерные физические параметры:

$$\frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2},\quad \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2},\quad \frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2},\quad \frac{A_{11}A_{88}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2},$$
$$\frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2},\quad \frac{A_{11}A_{77}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2},\quad \frac{A_{11}a^2}{B_{66}},\quad \frac{A_{11}a^2}{B_{44}}. \qquad (1.10)$$

здесь заметим, что в последних двух формулах входит также масштабный фактор.

2. Построение внутреннего итерационного процесса. Модель микрополярной упругой тонкой балки. В уравнениях (1.1)-(1.4) плоской задачи несимметричной теории упругости перейдем к безразмерной системе координат и к безразмерным величинам по формулам:

$$\xi=\frac{x_1}{a},\qquad \zeta=\frac{x_2}{h}, \qquad (2.1)$$

$$\bar{u}_i=\frac{u_i}{a},\quad \bar{\sigma}_{ij}=\frac{\sigma_{ij}}{A_{11}},\quad \bar{\mu}_{i3}=\frac{\mu_{i3}}{aA_{11}}. \qquad (2.2)$$

В итоге получим сингулярно-возмущенной с малым параметром δ краевую задачу, решение которой складывается из суммы решений внутренней задачи (прикладной - одномерной теории) и погранслойных задач (около боковых граней прямоугольника $x_1=0,\ x_1=a$).

Решение внутренней задачи представим в виде асимптотического разложения

$$Q=\delta^{-q}\sum_{s=0}^{S}\delta^s Q^{(s)}, \qquad (2.3)$$

где Q -любое из напряжений (силовых и моментных), перемещений и поворота; q-натуральное число, которое различно для различных величин и которое определяется из условия получения непротиворечивой рекуррентной системы уравнений в асимптотических приближениях.

Для безразмерных физических параметров (1.10) примем значения [15]:

$$\frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sim 1,\quad \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sim 1,\quad \frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sim 1,\quad \frac{A_{11}A_{88}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sim 1,$$
$$\frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sim 1,\quad \frac{A_{11}A_{77}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sim 1,\quad \frac{A_{11}a^2}{B_{66}}\sim 1,\quad \frac{A_{11}a^2}{B_{44}}\sim 1. \qquad (2.4)$$

В случае (2.4), при изучении задачи изгиба, в выражениях (2.3) будем иметь [14]:

$$q=0 \quad \text{для} \quad \bar{\sigma}_{11},\ \bar{\sigma}_{22},\ \bar{u}_1,\ \bar{\mu}_{23};$$
$$q=1 \quad \text{для} \quad \bar{\sigma}_{21},\ \bar{\sigma}_{12},\ \bar{u}_2,\ \bar{\mu}_{13},\omega_3. \qquad (2.5)$$

Уравнения (1.1)-(1.4) (в координатах (2.1) и по безразмерным величинам (2.2)) в асимптотических приближениях будут выражаться так:

$$\frac{\partial\bar{\sigma}_{11}^{(s-2)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\bar{\sigma}_{21}^{(s)}}{\partial\zeta}=0,\qquad \frac{\partial\bar{\sigma}_{12}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\bar{\sigma}_{22}^{(s)}}{\partial\zeta}=0,$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1^{(s)}}{\partial \xi} = \frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\bar{\sigma}_{11}^{(s)} - \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\bar{\sigma}_{22}^{(s)}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2^{(s)}}{\partial \zeta} = -\frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\bar{\sigma}_{11}^{(s-2)} + \frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\bar{\sigma}_{22}^{(s-2)},$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2^{(s)}}{\partial \xi} - \omega_3^{(s)} = \frac{A_{11}A_{88}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\bar{\sigma}_{12}^{(s)} - \frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\bar{\sigma}_{21}^{(s)}, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1^{(s)}}{\partial \zeta} + \omega_3^{(s)} = -\frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\bar{\sigma}_{12}^{(s)} + \frac{A_{11}A_{77}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\bar{\sigma}_{21}^{(s)},$$

$$\frac{\partial \omega_3^{(s)}}{\partial \xi} = \frac{a^2 A_{11}}{B_{66}}\bar{\mu}_{13}^{(s)}, \quad \frac{\partial \omega_3^{(s)}}{\partial \zeta} = \frac{a^2 A_{11}}{B_{44}}\bar{\mu}_{23}^{(s-2)}, \qquad \frac{\partial \bar{\mu}_{13}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\mu}_{23}^{(s)}}{\partial \zeta} + \bar{\sigma}_{12}^{(s)} - \bar{\sigma}_{21}^{(s)} = 0 .$$

При $s = 0$, используя также граничные условия на лицевых линиях $\zeta = \pm 1$ прямоугольника для σ_{22} из (1.5), из (2.6) получим

$$\bar{u}_2^{(0)} = \overset{0}{u}{}_2^{(0)}(\xi), \qquad \omega_3^{(0)} = \overset{0}{\omega}{}_3^{(0)}(\xi), \qquad \bar{u}_1^{0} = \zeta \psi_1^{(0)}(\xi), \tag{2.7}$$

$$\psi_1^{(0)} = -\overset{0}{\omega}{}_3^{(0)}(\xi) - \frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\overset{0}{\sigma}{}_{12}^{(0)}(\xi) + \frac{A_{11}A_{77}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\overset{0}{\sigma}{}_{21}^{(0)}(\xi)$$

$$\bar{\sigma}_{21}^{(0)} = \overset{0}{\sigma}{}_{21}^{(0)}(\xi), \tag{2.8}$$

$$\bar{\sigma}_{12}^{(0)} = \overset{0}{\sigma}{}_{12}^{(0)}(\xi) = \frac{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}{A_{88}A_{11}}\left[\frac{d\overset{0}{u}{}_2^{(0)}(\xi)}{d\xi} - \overset{0}{\omega}{}_3^{(0)}(\xi)\right] + \frac{A_{78}}{A_{88}}\overset{0}{\sigma}{}_{21}^{(0)}(\xi), \tag{2.9}$$

$$\bar{\sigma}_{11}^{(0)} = \zeta \overset{1}{\sigma}{}_{11}^{(0)}(\xi), \text{ где } \overset{1}{\sigma}{}_{11}^{(0)}(\xi) = \frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}{A_{11}A_{22}}\frac{d\psi_1^{(0)}(\xi)}{d\xi} + \frac{A_{12}}{A_{11}A_{22}}\frac{Y^+ + Y^-}{2},$$

$$\bar{\sigma}_{22}^{(0)} = -\zeta \frac{d\overset{0}{\sigma}{}_{12}^{(0)}(\xi)}{d\xi} = \zeta \frac{Y^+ + Y^-}{2A_{11}},$$

$$\bar{\mu}_{13}^{(0)} = \overset{0}{\mu}{}_{13}^{(0)}(\xi) = \frac{B_{66}}{a^2 A_{11}}\frac{d\overset{0}{\omega}{}_3^{(0)}(\xi)}{d\xi}, \bar{\mu}_{23}^{(0)} = \zeta\left[-\frac{d\overset{0}{\mu}{}_{13}^{(0)}(\xi)}{d\xi} - \left(\overset{0}{\sigma}{}_{12}^{(0)}(\xi) - \overset{0}{\sigma}{}_{21}^{(0)}(\xi)\right)\right]. \tag{2.10}$$

Асимптотические приближения внутреннего итерационного процесса с номером $s = 1$ и, вообще, с нечетными индексами, будем принимать нулевыми.

Для полного определения выражения для σ_{21} (для которого пока имеем формулу (2.8)),будем рассматривать первое уравнение из системы (2.6) при $s = 2$, будем иметь

$$\frac{\partial \overline{\sigma}_{11}^{(0)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \overline{\sigma}_{21}^{(2)}}{\partial \zeta}=0. \tag{2.11}$$

Из уравнения (2.11) $\overline{\sigma}_{21}^{(2)}$ определим таким образом, чтобы он выражался при помощи величин исключительно исходного асимптотического приближения, т.е. $s=0$. Это делается следующим образом.

Подставляя из (2.10) выражение для $\overline{\sigma}_{11}^{(0)}$ в уравнение (2.11), после интегрирования по ζ получим

$$\overline{\sigma}_{21}^{(2)}=\overset{0}{\sigma}{}_{21}^{(2)}(\xi)-\frac{1}{2}\zeta^{2}\frac{d\overset{1}{\sigma}{}_{11}^{(0)}(\xi)}{d\xi}. \tag{2.12}$$

Интеграл по толщине прямоугольника для выражения $\overline{\sigma}_{21}^{(2)}$ будем приравнивать к нулю, тогда для $\overset{0}{\sigma}{}_{21}^{(2)}(\xi)$ будем иметь:

$$\overset{0}{\sigma}{}_{21}^{(2)}(\xi)=\frac{1}{6}\frac{d\overset{1}{\sigma}{}_{11}^{(0)}(\xi)}{d\xi}. \tag{2.13}$$

Это выражение, подставляя в формулу (2.12), для $\overline{\sigma}_{21}^{(2)}$ получим следующее выражение:

$$\overline{\sigma}_{21}^{(2)}=\left(\frac{1}{6}-\frac{\zeta^{2}}{2}\right)\frac{d\overset{1}{\sigma}{}_{11}^{(0)}(\xi)}{d\xi}. \tag{2.14}$$

Складывая (2.8) и (2.14) в смысле (2.3) для σ_{21}, будем окончательно иметь (в размерном виде)

$$\sigma_{21}=A_{11}\delta^{-1}\left\{\overset{0}{\sigma}{}_{21}^{(0)}(\xi)+\delta^{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{\zeta^{2}}{2}\right)\frac{d\overset{1}{\sigma}{}_{11}^{(0)}(\xi)}{d\xi}\right\}. \tag{2.15}$$

Остальные определяющие задачу величины, которые выражаются через величины исходного приближения, представим в окончательном размерном виде:

$$\begin{gathered}
w=a\delta^{-1}\overset{0}{u}{}_{2}^{(0)}(\xi),\quad u_{1}=x_{2}\psi_{1}(x_{1}),\quad \psi_{1}(x_{1})=\delta^{-1}\psi_{1}^{(0)}(\xi),\quad \Omega_{3}=\delta^{-1}\omega_{3}^{(0)},\\
\sigma_{12}=A_{11}\delta^{-1}\overset{0}{\sigma}{}_{12}^{(0)},\sigma_{22}=A_{11}\overline{\sigma}_{22}^{(0)},\ \sigma_{11}=A_{11}\overline{\sigma}_{11}^{(0)},\\
\mu_{13}=A_{11}a\delta^{-1}\overline{\mu}_{13}^{(0)},\ \ \mu_{23}=A_{11}a\overline{\mu}_{23}^{(0)}.
\end{gathered} \tag{2.16}$$

С целью приведения двумерной задачи микрополярной теории упругости к одномерной, что уже выполнено для перемещений, свободного поворота, деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, в модели микрополярных ортотропных упругих балок вместо компонент тензоров силовых и моментных напряжений введем статически эквивалентные им интегральные характеристики: усилия N_{12}, N_{21} и моменты M_{11}, L_{13}, по формулам:

$$N_{12} = \int_{-h}^{h} \sigma_{12} dx_2, \quad N_{21} = \int_{-h}^{h} \sigma_{21} dx_2, \quad M_{11} = \int_{-h}^{h} \sigma_{11} x_2 dx_2, \quad L_{13} = \int_{-h}^{h} \mu_{13} dx_2.$$

Здесь важно отметить, что усредненное усилие N_{21} от силового напряжения σ_{21} одинаково как на уровне (2.8), так и на уровне (2.15).

Имея эти результаты, на основе формул (2.10), (2.15), (2.16), удовлетворяя граничные условия (1.5) на лицевых линиях прямоугольника $x_2 = \pm h$, получим основные уравнения (одномерные) изгиба микрополярной ортотропной балки с независимыми полями перемещений и вращений:

Уравнения равновесия

$$\frac{dN_{12}}{dx_1} = -\left(Y^+ + Y^-\right), \; N_{21} - \frac{dM_{11}}{dx_1} = h\left(X^+ - X^-\right), \; \frac{dL_{13}}{dx_1} + N_{12} - N_{21} = -\left(M^+ + M^-\right). \quad (2.17)$$

Соотношения упругости

$$N_{12} = 2h\left[A_{77}\Gamma_{12} + A_{78}\Gamma_{21}\right], \qquad N_{21} = 2h\left[A_{88}\Gamma_{21} + A_{78}\Gamma_{12}\right],$$

$$M_{11} = \frac{2h^3}{3}\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}K_{11} + \frac{h^2}{3}\frac{A_{12}}{A_{22}}\left(Y^+ + Y^-\right), \quad L_{13} = 2B_{66}hk_{13}. \quad (2.18)$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{12} = \frac{dw}{dx_1} - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \psi_1 + \Omega_3, \quad K_{11} = \frac{d\psi_1}{dx_1}, \quad k_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}. \quad (2.19)$$

3.Построение погранслоя. Обратимся к изучению краевых упругих явлений несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений в тонком прямоугольнике. Краем прямоугольника, вблизи которого будем исследовать напряженное состояние пограничного слоя, пусть будет сторона прямоугольника $x_1 = 0$.

Введем в уравнения плоской задачи несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений (1.1)-(1.4) преобразования растяжения

$$t = \frac{x_1}{h}, \quad \zeta = \frac{x_2}{h} \quad (3.1)$$

и перейдем к безразмерным величинам по формулам (2.2).

Решение преобразованной таким образом системы отыщем в виде асимптотического разложения:

$$R = \sum_{s=0}^{S} \delta^{\chi_R + s} \cdot R^{(s)}, \quad (3.2)$$

где R- любая из величин рассматриваемой задачи. Так как силовые и моментные неоднородные граничные условия (1.5), заданные на лицевых сторонах прямоугольника $\zeta=\pm 1$, были удовлетворены решением внутренней задачи, то решение (3.2) должно удовлетворять однородным граничным условиям:

$$\bar{\sigma}_{21}=\bar{\sigma}_{22}=0\,,\ \ \bar{\mu}_{23}=0 \ \text{ при } \ \zeta=\pm 1. \tag{3.3}$$

После подстановки (3.2) в преобразованную систему уравнений (1.1)-(1.4) с учетом (2.4) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра δ в правых и левых частях, начиная с наименьшей, получим непротиворечивую систему рекуррентных уравнений относительно величин $R^{(s)}$, если[15]

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{ij}=\delta^{\chi}\sum\limits_{s=0}^{S}\delta^{s}\bar{\sigma}_{ij}^{(s)}\,,\ \ (ij:11,22,\ 12,21),\bar{u}_i=\delta^{\chi+1}\sum\limits_{s=0}^{S}\delta^{s}\bar{\mathrm{u}}_i^{(s)}\ \ (i=1,2), \\ \bar{\mu}_{i3}=\delta^{\chi}\sum\limits_{s=0}^{S}\delta^{s}\bar{\mu}_{i3}^{(s)}\,(i=1,2),\ \ \omega_3=\delta^{\chi+1}\sum\limits_{s=0}^{S}\delta^{s}\omega_3^{(s)}\,, \end{cases} \tag{3.4}$$

где целое число χ - характеризует интенсивность пограничного слоя.

Полученную систему уравнений в асимптотических приближениях s можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\bar{\sigma}_{11}^{(s)}}{\partial t}+\dfrac{\partial\bar{\sigma}_{21}^{(s)}}{\partial\zeta}=0, \qquad \dfrac{\partial\bar{\sigma}_{12}^{(s)}}{\partial t}+\dfrac{\partial\bar{\sigma}_{22}^{(s)}}{\partial\zeta}=0, \\ \dfrac{\partial\bar{\mathrm{u}}_1^{(s)}}{\partial t}=\dfrac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\bar{\sigma}_{11}^{(s)}-\dfrac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\bar{\sigma}_{22}^{(s)}\,, \\ \dfrac{\partial\bar{\mathrm{u}}_1^{(s)}}{\partial\zeta}=-\dfrac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\bar{\sigma}_{12}^{(s)}+\dfrac{A_{11}A_{77}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\bar{\sigma}_{21}^{(s)}-\omega_3^{(s-1)}, \\ \dfrac{\partial\bar{\mathrm{u}}_2^{(s)}}{\partial\zeta}=-\dfrac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\bar{\sigma}_{11}^{(s)}+\dfrac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\bar{\sigma}_{22}^{(s)}, \\ \dfrac{\partial\bar{\mathrm{u}}_2^{(s)}}{\partial t}=\dfrac{A_{11}A_{88}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\bar{\sigma}_{12}^{(s)}-\dfrac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\bar{\sigma}_{21}^{(s)}+\omega_3^{(s-1)}; \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\bar{\mu}_{13}^{(s)}}{\partial t}+\dfrac{\partial\bar{\mu}_{23}^{(s)}}{\partial\zeta}=\bar{\sigma}_{21}^{(s-1)}-\bar{\sigma}_{12}^{(s-1)}, \\ \dfrac{\partial\omega_3^{(s)}}{\partial t}=\dfrac{a^2A_{11}}{B_{66}}\bar{\mu}_{13}^{(s)}, \qquad \dfrac{\partial\omega_3^{(s)}}{\partial\zeta}=\dfrac{a^2A_{11}}{B_{44}}\bar{\mu}_{23}^{(s)}. \end{cases} \tag{3.6}$$

Забегая вперед отметим, что погранслойная задача отлично от нуля при любом s-четном или несчетном. Важно констатировать, что при любом s решение погранслойных уравнений (3.5), (3.6) обладают некоторыми важными свойствами, которые можно получить непосредственно из указанных уравнений, если к ним применить следующие интегральные операторы:

$$\int_{-1}^{1} d\zeta \int_{0}^{\infty} dt, \quad \int_{-1}^{1} \zeta d\zeta \int_{0}^{\infty} dt, \quad \int_{-1}^{1} d\zeta \int_{0}^{\infty} tdt.$$

В итоге будем иметь следующие интегральные соотношения, которые иначе называют условиями затухания решения задачи пограничного слоя (ниже приводятся условия затухания в случае задачи изгиба):

$$\int_{-1}^{1} \bar{\sigma}_{12}^{(s)}(t=0)d\zeta = 0,$$

$$\int_{-1}^{1} \bar{\mu}_{13}^{(s)}(t=0)d\zeta = \int_{-1}^{1} d\zeta \int_{0}^{\infty} \left(\bar{\sigma}_{12}^{(s-1)} - \bar{\sigma}_{21}^{(s-1)}\right)dt,$$

$$\int_{-1}^{1} \omega_3^{(s)}(t=0)d\zeta = \frac{a^2 A_{11}}{B_{66}} \int_{0}^{\infty} tdt \int_{-1}^{1} \left(\bar{\sigma}_{21}^{(s-1)} - \bar{\sigma}_{12}^{(s-1)}\right)d\zeta. \tag{3.7}$$

$$\int_{-1}^{1} \zeta \bar{\sigma}_{11}^{(s)}(t=0)d\zeta + \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}{A_{78}A_{11}} \int_{-1}^{1} \bar{u}_2^{(s)}(t=0)d\zeta = -\frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}{A_{78}A_{11}} \int_{-1}^{1} d\zeta \int_{0}^{\infty} \omega_3^{(s-1)}dt,$$

при $s = 0$ из (3.7) имеем

$$\int_{-1}^{1} \bar{\sigma}_{12}^{(0)}(t=0)d\zeta = 0, \qquad \int_{-1}^{1} \bar{\mu}_{13}^{(0)}(t=0)d\zeta = 0, \tag{3.8}$$

$$\int_{-1}^{1} \omega_3^{(0)}(t=0)d\zeta = 0, \tag{3.9}$$

$$\int_{-1}^{1} \zeta \bar{\sigma}_{11}^{(0)}(t=0)d\zeta + \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}{A_{78}A_{11}} \int_{-1}^{1} \bar{u}_2^{(0)}(t=0)d\zeta = 0. \tag{3.10}$$

Легко убедиться, что самоуравновешенный характер $\omega_3^{(0)}$ имеет не только при $t = 0$, но и при любом t. Действительно, если принять в виду при $s = 0$, предпоследнее уравнение из системы (3.6), то можем написать:

$$\int_{-1}^{1} d\zeta \int_{t}^{\infty} \frac{\partial \omega_3^{(0)}}{\partial t} dt = \frac{A_{11}a^2}{B_{66}} \int_{t}^{\infty} \int_{-1}^{1} \bar{\mu}_{13}^{(0)} d\zeta dt$$

откуда будем иметь:

$$-\int_{-1}^{1} \omega_3^{(0)}(\zeta, t)d\zeta = \frac{A_{11}a^2}{B_{66}} \int_{t}^{\infty} \int_{-1}^{1} \bar{\mu}_{13}^{(0)} d\zeta dt. \tag{3.11}$$

Далее на основе первого уравнения системы (3.6), при $s = 0$, получим

$$\int_{-1}^{1} d\zeta \int_{t}^{\infty} \frac{\partial \overline{\mu}_{13}^{(0)}}{\partial t} dt + \int_{t}^{\infty} dt \int_{-1}^{1} \frac{\partial \overline{\mu}_{23}^{(0)}}{\partial \zeta} d\zeta = 0.$$

Так как $\overline{\mu}_{23} = 0$ ((3.3)), как при $\zeta = +1$, так и при $\zeta = -1$, отсюда приходим к следующему равенству:

$$\int_{-1}^{1} \overline{\mu}_{13}^{(0)}(\zeta, t) d\zeta = 0 .$$

Следовательно, будет иметь место следующее равенство:

$$\int_{t}^{\infty} \int_{-1}^{1} \overline{\mu}_{13}^{(0)}(\zeta, t) d\zeta dt = 0 . \qquad (3.12)$$

Тогда на основании равенств (3.11) и (3.12) будем иметь требуемое равенство:

$$\int_{-1}^{1} \omega_3^{(0)}(\zeta, t) d\zeta = 0 . \qquad (3.13)$$

Из равенства (3.13), как следствие, получим также следующее равенство:

$$\int_{0}^{\infty} \int_{-1}^{1} \omega_3^{(0)}(\zeta, t) d\zeta dt = 0. \qquad (3.14)$$

Имея ввиду (3.14), из последнего равенства (3.7), при $s = 1$, приходим к следующему важному равенству:

$$\int_{-1}^{1} \zeta \overline{\sigma}_{11}^{(1)}(t=0) d\zeta + \frac{A_{77} A_{88} - A_{78}^2}{A_{78} A_{11}} \int_{-1}^{1} \overline{\mathrm{u}}_2^{(1)}(t=0) d\zeta = 0 . \qquad (3.15)$$

Это означает, что равенство (3.10) имеет место как при $s = 0$, так и при $s = 1$ ((3.15)).

При $s = 0$, из четвертого и шестого уравнений системы (3.5) будем иметь также следующее свойство погранслойного решения:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\partial \overline{u}_1^{(0)}}{\partial \zeta}(t=0) d\zeta + \frac{A_{77}}{A_{78}} \int_{-1}^{1} \frac{\partial \overline{u}_2^{(0)}}{\partial t}(t=0) d\zeta = 0. \qquad (3.16)$$

Так как равенства (3.10), (3.15), (3.16) должны иметь место для любого материала (удовлетворяющего условиям (2.4)), следовательно, из этих равенств будут следовать следующие отдельные равенства:

$$\int_{-1}^{1} \zeta \overline{\sigma}_{11}^{(i)}(t=0) d\zeta = 0, \qquad \int_{-1}^{1} \overline{u}_2^{(i)}(t=0) d\zeta, \qquad i = 0,1; \qquad (3.17)$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\partial \overline{u}_1^{(0)}}{\partial \zeta}(t=0) d\zeta = 0, \qquad \int_{-1}^{1} \frac{\partial \overline{u}_2^{(0)}}{\partial t}(t=0) d\zeta = 0. \qquad (3.18)$$

Интегральные соотношения (3.8)-(3.10), (3.17), (3.18) ниже будут играть важную роль при сращивании асимптотических разложений внутреннего итерационного процесса и погранслоя, когда необходимо разделить общие граничные условия (1.6)-(1.8) плоской задачи, между указанными итерационными процесссами. В результате этого будем иметь граничные условия прикладной – одномерной теории микрополярных ортотропных упругих тонких балок (2.17)-(2.19) (конечно, отдельно получим также граничные условия погранслойной задачи (3.5), (3.6), при $s=0$, $s=1$ и т.д.).

Выше было описано явление пограничного слоя вблизи торца прямоугольника $x_1=0$.Пограничный слой вблизи противоположного торца $x_1=a$ строится аналогичным образом. Если отчет вести от торца $x_1=0$, данные для пограничного слоя около торца $x_1=a$ можем получить из изложенного выше формальной заменой t на $t_1=\dfrac{a-x_1}{h}$.

Таким образом, построены два типа решений: решение внутренней задачи и решение для пограничной задачи. Их сумма

$$I=Q+R_p^{(1)}+R_p^{(2)} \tag{3.19}$$

является решением исходной сингулярно - возмущенной краевой задачи несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений в тонкой прямоугольной области. Здесь Q - решение внутренней задачи, $R_p^{(1)}, R_p^{(2)}$- решения задач пограничных слоев, построенные соответственно вблизи торцов $x_1=0$ и $x_1=a$.

4. Сращивание асимптотических разложений внутреннего итерационного процесса и погранслоя. Получение граничных условий для прикладной – одномерной модели. Перейдем к изучению проблемы разделения двумерных граничных условий (1.6)-(1.8) несимметричной теории упругости на граничных кромках прямоугольника $x_1=0$ и $x_1=a$, в рамках которого необходимо выяснить вопрос о том, какие граничные условия надо приписывать к внутренним (к прикладной теории) и какие к погранслойным дифференциальным уравнениям. Приступим к удовлетворению граничных условий (1.6)-(1.8) на кромке $x_1=0$ прямоугольника. Сначала рассмотрим первую краевую задачу (1.6).

Подставляя (3.19) в (1.6) и учитывая (2.3) и (3.2), а также, что при $x_1=0$ проявляет себя только погранслой $R_p^{(1)}$, т.е. продольный размер a прямоугольника настолько велик, что влиянием погранслоя $R_p^{(2)}$(около торца $x_1=a$) можно пренебречь, когда изучаем погранслой у торца $x_1=0$, выберем $\chi=-1$, которое обеспечивает непротиворечивого итерационного процесса удовлетворения граничных условий. Таким образом, граничные условия (1.6) в асимптотических приближениях примут вид:

$$\overset{вн}{\sigma}{}_{11}^{(s-1)} + \overset{пс}{\sigma}{}_{11}^{(s)} = \bar{\varphi}_1^{(s-1)}, \quad \bar{\varphi}_1^{(0)} = \frac{\varphi_1}{A_{11}}, \qquad \bar{\varphi}_1^{(s)} = 0, \quad s \ge 1,$$

$$\overset{вн}{\sigma}{}_{12}^{(s)} + \overset{пс}{\sigma}{}_{12}^{(s)} = \bar{\varphi}_2^{(s)}, \quad \bar{\varphi}_2^{(0)} = \frac{\varphi_2}{A_{11}\delta^{-1}}, \quad \bar{\varphi}_2^{(s)} = 0, \quad s \ge 1, \tag{4.1}$$

$$\overset{вн}{\mu}{}_{13}^{(s)} + \overset{пс}{\mu}{}_{13}^{(s)} = \bar{\varphi}_3^{(s)}, \quad \bar{\varphi}_3^{(0)} = \frac{\varphi_3}{A_{11}a\delta^{-1}}, \quad \bar{\varphi}_3^{(s)} = 0, \quad s \ge 1.$$

При $s = 0$ из (4.1) получим:

$$\overset{пс}{\sigma}{}_{11}^{(0)} = 0, \; \overset{вн}{\sigma}{}_{12}^{(0)} + \overset{пс}{\sigma}{}_{12}^{(0)} = \bar{\varphi}_2^{(0)}, \; \overset{вн}{\mu}{}_{13}^{(0)} + \overset{пс}{\mu}{}_{13}^{(0)} = \bar{\varphi}_3^{(0)}. \tag{4.2}$$

Ко второму из (4.2) равенству применяя один из свойств (первое равенство из (3.8)) погранслойного решения, для величин $\overset{вн}{\sigma}{}_{12}^{(0)}$ внутренней задачи, при $x_1 = 0$ $(t = 0)$, будем иметь следующее граничное условие:

$$2\overset{0}{\sigma}{}_{12}^{(0)}(t)\Big|_{t=0} = \int_{-1}^{1} \bar{\varphi}_2^{(0)}(\zeta)d\zeta$$

или в размерном виде

$$N_{12}\big|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h} \varphi_2(x_2)dx_2\,. \tag{4.3}$$

Точно также, на основе третьего равенства из (4.2), с учетом второго из (3.8) равенство (свойство погранслойного решения), приходим к следующему граничному условия для $\overset{вн}{\mu}{}_{13}^{(0)}$ при $t = 0$:

$$2\overset{0}{\mu}{}_{13}^{(0)}(t)\Big|_{t=0} = \int_{-1}^{1} \bar{\varphi}_3^{(0)}(\zeta)d\zeta$$

или в размерном виде

$$L_{13}\big|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h} \varphi_3(x_2)dx_2\,. \tag{4.4}$$

Для погранслойной задачи (3.5), (3.6), при $s = 0$, получим следующие граничные условия при $t = 0$ (отметим, что система (3.5) при $s = 0$ отделяться от системы (3.6)):

$$\left.\overset{nc}{\sigma}{}_{11}^{(0)}\right|_{t=0}=0,\qquad \left.\overset{nc}{\sigma}{}_{12}^{(0)}\right|_{t=0}=\overline{\varphi}_2^{(0)}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\overline{\varphi}_2^{(0)}(\zeta)d\zeta,$$
$$\left.\overset{nc}{\mu}{}_{13}^{(0)}\right|_{t=0}=\overline{\varphi}_3^{(0)}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\overline{\varphi}_3^{(0)}(\zeta)d\zeta. \tag{4.5}$$

Здесь первые две граничные условия (т.е. (4.5)) относиться к системе уравнений (3.5), при $s=0$, а последнее граничное условие из (4.5)- к системе уравнений (3.6), при $s=0$.

Чтобы получить недостающее граничное условие для системы уравнений прикладной - одномерной теории микрополярных ортотропных балок (система уравнений (2.17)-(2.19)), в первом граничном условии из (4.1), подставим $s=1$, тогда приходим к следующему равенству при $t=0$:

$$\overset{вн}{\sigma}{}_{11}^{(0)}+\overset{nc}{\sigma}{}_{11}^{(1)}=\overline{\varphi}_1^{(0)}$$

или в виде

$$\overset{nc}{\sigma}{}_{11}^{(1)}=\overline{\varphi}_1^{(0)}-\overset{вн}{\sigma}{}_{11}^{(0)}\ . \tag{4.6}$$

Теперь примем во внимание первое равенство из (3.17) при $s=1$ (свойства погранслойного решения), на основе последнего равенства приходим к следующему граничному условию для $\overset{1}{\sigma}{}_{11}^{(0)}(t)$, при $t=0$:

$$\left.\frac{2}{3}\overset{1}{\sigma}{}_{11}^{(0)}(t)\right|_{t=0}=\int_{-1}^{1}\zeta\,\overline{\varphi}_1^{(0)}d\zeta$$

или в размерном виде:

$$\left.M_{11}\right|_{x_1=0}=\int_{-h}^{h}x_2\varphi_1(x_2)dx_2. \tag{4.7}$$

Если подставить (4.7) в (4.6), то для погранслойной задачи получим одно из граничных условий для следующего приближения $s=1$, при $t=0$:

$$\left.\overset{nc}{\sigma}{}_{11}^{(1)}\right|_{t=0}=\overline{\varphi}_1^{(0)}-\zeta\,\overset{1}{\sigma}{}_{11}^{(0)}(t=0),$$

Объединяя равенства (4.3), (4.5), (4.7)

$$\left.N_{12}\right|_{x_1=0}=\int_{-h}^{h}\varphi_2(x_2)dx_2,\quad \left.L_{13}\right|_{x_1=0}=\int_{-h}^{h}\varphi_3(x_2)dx_2,\quad \left.M_{11}\right|_{x_1=0}=\int_{-h}^{h}x_2\varphi_1(x_2)dx_3 \tag{4.8}$$

получим граничные условия прикладной - одномерной теории микрополярных ортотропных упругих тонких балок: (2.17)-(2.19).

Таким образом, построена модель прикладной - одномерной теории изгиба микрополярных ортотропных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений. Эта модель представляет собой систему основных уравнений (2.17)-(2.19) и граничные условия (4.8) (в случае граничных условий (1.6)).

Модель погранслойной задачи, при $s=0$, тоже построена, эта система основных уравнений (3.5), (3.6), при $s=0$, и граничные условия (4.5).

Понятно, что построение моделей, как внутренней задачи, так и погранслоя в последующих приближениях будут иметь итерационный характер.

Аналогичным образом можем изучать задачу сращивания внутреннего и погранслойного итерационного процесса также при граничных условиях (1.7) либо (1.8).

В случае шарнирного опирания края прямоугольника (граничные условия (1.7)), граничные условия при $x_1=0$ для основной системы уравнений прикладной теории микрополярных ортотропных балок будут выражаться так (отметим, что в этом случае значение $\chi=-1$):

$$M_{11}=\int_{-h}^{h}x_2\varphi_1(x_2)dx_2,\quad \mathrm{w}=0,\qquad L_{13}=\int_{-h}^{h}\varphi_3(x_2)dx_2 \tag{4.9}$$

а для защемленного края (граничные условия (1.8)) так (и в этом случае $\chi=-1$):

$$\psi_1=0,\quad \mathrm{w}=0,\qquad \Omega_3=0. \tag{4.10}$$

5. Сравнение моделей прикладной-одномерной теории изгиба микрополярных ортотропных упругих тонких балок построенной на основе метода гипотез и на основе асимптотического метода.

Отметим, что в работе [10] прикладная - одномерная теория балок построена на основе метода гипотез. Принятые гипотезы имеют следующие содержания:

а) нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к оси x_1, остается после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной оси, свободно вращается на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины. Вследствие этого имеем линейный закон изменения перемещений V_1, V_2 и свободного поворота Ω_3 по толщине прямоугольника:

$$V_2=w(x_1),\quad V_1=x_2\psi(x_1),\quad \omega_3=\Omega_3(x_1),$$

где $w-$прогиб балки, Ω_3-угол свободного поворота, $\psi-$полный угол поворота нормального элемента.

б) при определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений для силового напряжения σ_{21} сначала примем $\sigma_{21}=\overset{0}{\sigma}_{21}(x_1)$.

После определения указанных величин, значение σ_{21} окончательно определим как сумму значения (2.3) и результата интегрирования первого уравнения равновесия из (1.1), для которого потребуем, чтобы усредненная по толщине прямоугольника ее величина была равна нулю.

Как убедимся, эти гипотезы соответствуют свойствам асимптотического решения (внутреннего итерационного процесса) краевой задачи плоской микрополярной теории упругости в тонкой прямоугольной области ((1.1)-(1.8)).

Теперь будем сравнивать основные уравнения и граничные условия прикладной-одномерной теории микрополярных ортотропных упругих тонких балок ((2.17)-(2.19), (4.8)-(4.10)) с основными уравнениями и граничными условиями той же теории построенной на основе метода гипотез [16]. Как убедимся, разница лишь в выражении момента M_{11}. Речь идет о величине $\frac{h^2}{3}\frac{A_{12}}{A_{22}}\left(Y^+ + Y^-\right)$, которая присутствует в формуле (2.18) и которая отсутствует в аналогичной формуле работы [16]. Это результат того, что в формуле обобщенного законы Гука для величин ε_{11} (первое из (1.3) формул), по асимптотическому методу силовое напряжение σ_{22} не пренебрегается относительно силового напряжения σ_{11}, но по методу гипотез, как в классической теории такое пренебрегание оправдано, что и сделано в работе [16]. Отметим, что численные результаты тоже подтверждают это пренебрегание.

Таким образом, можем констатировать, что построенная прикладная –одномерная модель микрополярных ортотропных упругих тонких балок построенной в работе [16] представляет собой асимптотически точную модель.

Շ. Ի. Ալվաջյան

Ասիմպտոտիկ մեթոդով միկրոպոլյար առաձգական օրթոտրոպ բարակ ձողերի մաթեմատիկական մոդելի կառուցումը

Տվյալ աշխատանքում բարակ ուղղանկյուն տիրույթում հարթ լարվածային վիճակի դեպքում օրթոտրոպ նյութի համար զարգացվել է միկրոպոլյար առաձգական տեսության ինտեգրման ասիմպտոտիկ մեթոդը, կառուցվել է միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական բարակ ձողերի միաչափ կիրառական տեսությունը: Հիմնավորվել է հիպոթեզաների մեթոդի հիման վրա կառուցված միկրոպոլյար օրթոտրոպ ձողերի մոդելը:

Sh. I. Alvajyan

Mathematical Model of Micropolar Elastic Orthotropic Thin Bars with Asymptotic Method

In this paper we develop an asymptotic method of integration micropolar theory of elasticity for orthotropic material in the case of plane stress in a thin rectangle, built an application a one-dimensional theory of orthotropic micropolar elastic thin bars and justified by a model of micropolar orthotropic bars, built on the basis of hypotheses.

Л и т е р а т у р а

1. *Ворович И. И.* Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек // В сб.: Материалы I Всесоюзн. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Тбилиси: Изд-во Тбилисск. ун-та, 1975. С. 51-149.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 510с.
3. *Агаловян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М: Наука. 1997. 414с.
4. *Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V.* Dynamics of Thin Wolled Elastic Bodies. Academic Press. 1998. 225p.
5. *Rogacheva N.N.* The Theory of Piezoelectric Plates and Shells.-Boca Ration: SRS Press. 1994. 260p.
6. *Саркисян С.О.* Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд-во АН Армении. 1992. 232с.
7. Устинов Ю.А., Шленев М. А. О некоторых направлениях развития асимптотического метода плит и оболочек // Межвузовский сборник "Расчет оболочек и пластин". Ростов-на–Дону. Изд.-во Ростовского Инженерно-строительного ин.-та. 1978.С. 3-27.
8. *Саркисян С.О.* Прикладные одномерные теории балок на основе несимметричной теории упругости // Физическая мезомеханика. 2008. Т. 11. №5. С. 41-54.
9. *Саркисян С.О.* Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 1. С. 129-147.
10. *Саркисян С.О.* Общая теория упругих тонкиг оболочек на основе несимметричной теории упругости // Доклады НАН Армениии. 2008. Т.108. №4. С. 309-319.
11. *Sargsyan S.H* . Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars // Journal of Materials Science and Engineering. 2012. Vol.2. №1. P.98-108.
12. *Саркисян С.О.* Общие математические модели микрополярных упругих тонких пластин // Известия НАН Армении. Механика. 2011 Т.64. №1. С. 58-67.
13. *Саркисян С.О.* Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Доклады академии наук России. 2011. Т. 436. №2. С.195-198.
14. *Саркисян С.О.* Построение математической модели микрополярных упругих тонких болок асимптотическим методом// Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2012. N5. С. 31-37.
15. *Алваджян Ш. И.* Построение уравнений и граничных условий статической задачи изгиба микрополярных упругих ортотропных балок асимптотическим методом// Сборник научных трудов международной конференции "Актуальные проблемы механики сплошной среды".Ереван-2010. С. 71-75.
16. *Алваджян Ш.И., Саркисян С.О.* Прикладные модели статической деформации анизотропных микрополярных упругих тонких балок// Известия *НАН Армении. Механика.* 2011. Т. 64.N 4.С. 39-62.
17. *Iesan D. The plane micropolar strain of orthotropic elastic solids // Archives of Mechanics.1973. Vol.5. № 3. P.547-561.*

<u>Сведения об авторе</u>:

Алваджян Шушаник Искандаровна – *кандидат физ.-мат наук, асистент каф. мат. анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна.*

E-mail: alvajyanshushan@mail.ru

Поступило в редакцию 07.05.2012