ԳՅՈՒՄՐՈՒ Մ. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՄԱՆԿԱՎԱՐԺԱԿԱՆ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ГЮМРИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. М. НАЛБАНДЯНА
GYUMRI STATE PEDAGOGICAL INSTITUTE AFTER M. NALBANDYAN
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ SCIENTIFIC PROCEEDINGS

Պրակ Ա
Выпуск А
Issue A

2013 № 1

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 539.3

А. А. Саркисян

МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН С НЕЗАВИСИМЫМИ ПОЛЯМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ВРАЩЕНИЙ

Բանալի բառեր՝ միկրոպոլյար, առաձգական, սալ, ծռում, դինամիկա, մոդել, ալիքներ, բնութագրիչ հավասարում:

Ключевые слова: микрополярный, упругий, пластинка, изгиб, динамика, модель, волны, характеристическое уравнение.

Keywords: micropolar, elastic, plate, bending, dynamics, model, waves, characteristic equation.

В работе построена модель динамического изгиба изотропных микрополярно-упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений. В точной постановке трехмерной задачи для слоя микрополярной теории упругости со свободным вращением и на основе построенной двумерной прикладной модели микрополярной пластинки изучена задача о распространении волны. В случае длинных волн показано совпадение характеристических уравнений распространения волны по указанным обеим моделям.

Введение. Микрополярная теория упругости является одной из основных феноменологических моделей сред с внутренней структурой. Эффекты микрополярности материала особенно существенны в тонких телах (балки, пластинки, оболочки). Современные достижения в области теории микрополярных тонких балок, пластин и оболочек освещены в работах [1,2].

В работах [3-5] развит метод гипотез построения моделей микрополярно–упругих тонких балок, пластин и оболочек, который опирается на асимптотическом анализе изучения свойств решений плоских и пространственных граничных задач микрополярной теории упругости в тонких областях. В указанных моделях микрополярно–упругих тонких балок, пластин и оболочек полностью учитываются поперечно сдвиговые и родственные им деформации.

В данной работе развивается метод гипотез [3-5], на основе которого построена модель динамического изгиба микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений. Далее, изучается задача о распространении плоской волны (в точной постановке) в микрополярно - упругом слое. В длинноволновом приближении показывается совпадение характеристического уравнения распространения волны с аналогичным уравнением, полученном на основании построенной прикладной модели микрополярной пластинки.

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропную пластинку постоянной толщины $2h$ как трехмерное упругое микрополярное тело. Отнесем пластинку к ортогональной криволинейной системе координат α_n с коэффициентами Ламе H_1, H_2 (которые зависят только от $\alpha_i, i=1,2$) и $H_3=1$. Примем, что срединная плоскость пластинки совпадает с координатной плоскостью $\alpha_1\alpha_2$. Будем исходить из основных уравнений пространственной динамической задачи линейной микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [6-9]:

Уравнения движения

$$\frac{1}{H_i}\frac{\partial\sigma_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_j}{\partial\alpha_i}(\sigma_{ii}-\sigma_{jj})+\frac{1}{H_j}\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}(\sigma_{ji}+\sigma_{ij})+ \\ +\frac{\partial\sigma_{3i}}{\partial\alpha_3}=\rho\frac{\partial^2V_i}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\sigma_{13}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\sigma_{23}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\alpha_3}=\rho\frac{\partial^2V_3}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

$$\frac{1}{H_i}\frac{\partial\mu_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_j}{\partial\alpha_i}(\mu_{ii}-\mu_{jj})+\frac{1}{H_j}\frac{\partial\mu_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}(\mu_{ji}+\mu_{ij})+\frac{\partial\mu_{3i}}{\partial\alpha_3}+ \\ +(-1)^j(\sigma_{j3}-\sigma_{3j})=J\frac{\partial^2\omega_i}{\partial t^2} \tag{1.3}$$

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial\mu_{13}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\mu_{13}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial\mu_{23}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\mu_{23}+\frac{\partial\mu_{33}}{\partial\alpha_3}+ \\ +(\sigma_{12}-\sigma_{21})=J\frac{\partial^2\omega_3}{\partial t^2} \tag{1.4}$$

Физико-геометрические соотношения

$$\gamma_{ii}=\frac{1}{H_i}\frac{\partial V_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}V_j=\frac{1}{E}[\sigma_{ii}-\nu(\sigma_{jj}+\sigma_{33})] \tag{1.5}$$

$$\gamma_{33}=\frac{\partial V_3}{\partial\alpha_3}=\frac{1}{E}[\sigma_{33}-\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})] \tag{1.6}$$

$$\gamma_{ij}=\frac{1}{H_i}\frac{\partial V_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}V_i-(-1)^j\omega_3=\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{ij}-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{ji} \tag{1.7}$$

$$\gamma_{i3} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial V_3}{\partial \alpha_i} + (-1)^j \omega_j = \frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{i3} - \frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{3i} \tag{1.8}$$

$$\gamma_{3i} = \frac{\partial V_i}{\partial \alpha_3} - (-1)^j \omega_j = \frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{3i} - \frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{i3} \tag{1.9}$$

$$\chi_{ii} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial \omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_i H_j}\frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j}\omega_j = \frac{\beta+\gamma}{\gamma(3\beta+2\gamma)}\left[\mu_{ii} - \frac{\beta}{2(\beta+\gamma)}(\mu_{jj}+\mu_{33})\right] \tag{1.10}$$

$$\chi_{33} = \frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_3} = \frac{\beta+\gamma}{\gamma(3\beta+2\gamma)}\left[\mu_{33} - \frac{\beta}{2(\beta+\gamma)}(\mu_{11}+\mu_{22})\right] \tag{1.11}$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial \omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{H_i H_j}\frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j}\omega_i = \frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{ij} - \frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{ji} \tag{1.12}$$

$$\chi_{i3} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_i} = \frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{i3} - \frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{3i}, \quad \chi_{3i} = \frac{\partial \omega_i}{\partial \alpha_3} = \frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{3i} - \frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{i3} \tag{1.13}$$

Для граничных условий на лицевых плоскостях пластинки примем граничные условия первой граничной задачи несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений

$$\sigma_{3n} = p_n^{\pm}, \ \mu_{3n} = m_n^{\pm} \ \ \text{при} \ \ \alpha_3 = \pm h \ , \ n = 1,2,3 \tag{1.14}$$

Граничные условия на боковой поверхности пластинки $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления, запишутся либо в напряжениях (силовых и моментных), либо в перемещениях и поворотах, либо в смешанном виде:

$$\sigma_{mn} n_m = p_n^*, \ \mu_{mn} n_m = m_n^* \ \ \text{на} \ \Sigma_1, \quad V_n = V_n^{\bullet}, \ \ \omega_n = \omega_n^{\bullet} \ \ \text{на} \ \Sigma_2, m,n = 1,2,3 \tag{1.15}$$

где $\overset{*}{p}_n, \overset{*}{m}_n$ – компоненты заданных внешних усилий и моментов на Σ_1; $V_n^{\bullet}, \omega_n^{\bullet}$ – заданные компоненты векторов перемещений и независимого поворота на Σ_2.

При помощи начальных условий, при $t = 0$, задаются значения компонентов векторов перемещения, независимого поворота, линейной и вращательной скоростей точек тела:

$$\begin{aligned} V_n\big|_{t=0} &= f_n(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), \qquad \frac{\partial V_n}{\partial t}\Big|_{t=0} = F_n(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \\ \omega_n\big|_{t=0} &= \varphi_n(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), \qquad \frac{\partial \omega_n}{\partial t}\Big|_{t=0} = \Phi_n(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), \ \ n = 1,2,3 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Решение начально-краевой задачи (1.1)-(1.16) складывается из суммы решений симметричной и обратно-симметричной по α_3 задач (это утверждение можем доказать таким же подходом, как аналогичное утверждение было доказано в классической теории упругости). В симметричной задаче (плоское напряженное состояние пластинки) $\sigma_{ii}, \sigma_{ij}, \sigma_{33}, \mu_{i3}, \mu_{3i}, V_i, \omega_3$ – четные по α_3 функции, а $\sigma_{i3}, \sigma_{3i}, \mu_{ii}, \mu_{ij}, \mu_{33}$, V_3, ω_i – нечетные, в обратно-симметричной задаче (изгиб пластинки) -наоборот (здесь и в дальнейшем, индексы i, j принимают значения 1,2, причем $i \neq j$). В дальнейшем будем рассматривать задачу изгиба полярной пластинки.

Отметим, что для задачи изгиба пластинки, граничные условия (1.15) (при $\alpha_3 = \pm h$) примут вид:

$$\begin{aligned} &\sigma_{3i} = \frac{p_i^+ + p_i^-}{2} = \widetilde{p}_i, \ \sigma_{33} = \pm \frac{p_3^+ - p_3^-}{2} = \pm \widetilde{p}_3 \\ &\mu_{3i} = \pm \frac{m_i^+ - m_i^-}{2} = \pm \widetilde{m}_i, \ \mu_{33} = \frac{m_3^+ + m_3^-}{2} = \widetilde{m}_3 \end{aligned} \tag{1.17}$$

2. Модели микрполярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений. Будем предполагать, что толщина пластинки $2h$ мала по сравнению с размером a пластинки в плане, т. е. $2h << a$.

Ниже будем развивать подход [3-5] для построения динамической модели микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением на основе метода гипотез.

Качественные результаты исходного приближения асимптотического метода интегрирования начально-краевой задачи (1.1)-(1.16) [10,11] позволяют, в основе построения двумерной динамической модели микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений формулировать следующие достаточно общие предположения (гипотезы):

1. нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к срединной плоскости пластинки, остается после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной срединной плоскости, свободно вращается на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины. При этом тангенциальные компоненты вектора свободного вращения постоянные функции по толщине пластинки, а нормальная компонента –линейная функция.

Вследствие этого примем следующий линейный закон изменения перемещений и свободных вращений:

$$V_i = \alpha_3 \psi_i(\alpha_1, \alpha_2, t), V_3 = w(\alpha_1, \alpha_2, t), \ \ \omega_i = \Omega_i(\alpha_1, \alpha_2, t), \ \ \omega_3 = \alpha_3 \iota(\alpha_1, \alpha_2, t) \tag{2.1}$$

где ψ_i -полные углы поворота; Ω_i -некоторые свободные повороты первоначально нормального элемента вокруг осей α_i ; w -перемещение точек срединной плоскости пластинки в направлении α_3 ; ι -интенсивность свободного поворота ω_3 вдоль оси α_3 ;

2. в физических соотношениях (1.5),(1.6) силовое напряжение σ_{33} можем пренебрегать относительно силовых напряжений σ_{ii};

3. при определении деформаций, изгиба -кручений, силовых и моментных напряжений, для силовых напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} сначала примем

$$\sigma_{3i} = \overset{0}{\sigma}_{3i}(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad \mu_{33} = \overset{0}{\mu}_{33}(\alpha_1, \alpha_2, t) \tag{2.2}$$

После определения указанных величин, значения σ_{3i} и μ_{33} окончательно определим, как сумму значений (2.2) и результатов интегрирования по α_3 соответствующих уравнений движения (1.1),(1.4), требуя условия, чтобы усредненные по толщине пластинки их величины были равны нулю.

В соответствии с принятой кинематической гипотезой (2.1) приступим к вычислению деформаций и изгиба-кручений.

Рассматривая формулы (1.8),(1.9) для деформаций γ_{i3}, γ_{3i} (необходимо рассматривать геометрические уравнения), с учетом (2.1) получим:

$$\gamma_{i3} = \Gamma_{i3}(\alpha_1, \alpha_2, t), \; \gamma_{3i} = \Gamma_{3i}(\alpha_1, \alpha_2, t) \tag{2.3}$$

где

$$\Gamma_{3i} = \psi_i - (-1)^j \Omega_j, \quad \Gamma_{i3} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial \alpha_i} + (-1)^j \Omega_j \tag{2.4}$$

Из уравнений (1.5) (рассматривая геометрические уравнения), учтя формулы (2.1), для деформаций γ_{ii} получим:

$$\gamma_{ii} = \alpha_3 K_{ii}(\alpha_1, \alpha_2, t) \tag{2.5}$$

где

$$K_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\psi_j \tag{2.6}$$

Если рассмотрим те же формулы (1.5) (но теперь в виде законов упругости), примем в виду формулы (2.5) и используем гипотезу 2), для силовых напряжений σ_{ii} получим следующие формулы:

$$\sigma_{ii} = \alpha_3 \hat{\sigma}_{ii}(\alpha_1, \alpha_2, t), \; \hat{\sigma}_{ii}(\alpha_1, \alpha_2, t) = \frac{E}{1-\nu^2}(K_{ii} + \nu K_{jj}) \tag{2.7}$$

При помощи уравнения (1.6) и на основе формул (2.1) деформация γ_{33} (рассматривая геометрическое уравнение) получается нулевым:

$$\gamma_{33} = 0 \tag{2.8}$$

При помощи уравнений (1.7) для деформаций γ_{ij} (рассматривая геометрические уравнения), на основе формул (2.1), будем иметь:

$$\gamma_{ij} = \alpha_3 K_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, t) \qquad (2.9)$$

где

$$K_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \psi_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\psi_i - (-1)^j \iota \qquad (2.10)$$

Из тех же уравнений (1.7) (рассматривая физические соотношения), если учтем формулы (2.9), для силовых напряжений σ_{ij} получим:

$$\sigma_{ij} = \alpha_3 \hat{\sigma}_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, t)\,,\, \hat{\sigma}_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, t) = (\mu + \alpha)K_{ij} + (\mu - \alpha)K_{ji} \qquad (2.11)$$

Из уравнений (1.8), (1.9) (рассматривая физические уравнения), с учетом предположения 3), для силовых напряжений σ_{i3} и σ_{3i}^0 будем иметь:

$$\sigma_{i3} = (\mu + \alpha)\Gamma_{i3} + (\mu - \alpha)\Gamma_{3i}\,,\; \sigma_{3i}^0 = (\mu + \alpha)\Gamma_{3i} + (\mu - \alpha)\Gamma_{i3} \qquad (2.12)$$

Если рассмотрим уравнение движения (1.2), с учетом предположения 2) и формул (2.12), для силового напряжения σ_{33} получим:

$$\sigma_{33} = -\alpha_3\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\sigma_{13} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\sigma_{23} - \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) \qquad (2.13)$$

Рассмотрим геометрические уравнения из (1.10). Принимая во внимание соответствующие кинематические формулы из (2.1), для χ_{ii} получим:

$$\chi_{ii} = \kappa_{ii}(\alpha_1, \alpha_2, t) = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_j \qquad (2.14)$$

Теперь рассмотрим те же уравнения (1.10), только сейчас рассмотрим соответствующие физические соотношения. Учтя предположение 3) относительно моментного напряжения μ_{33}, для моментных напряжений μ_{ii} будем иметь:

$$\mu_{ii} = \frac{4\gamma(\beta + \gamma)}{\beta + 2\gamma}\kappa_{ii} + \frac{2\beta\gamma}{\beta + 2\gamma}\kappa_{jj} + \frac{\beta}{\beta + 2\gamma}\mu_{33}^0 \qquad (2.15)$$

Далее, примем во внимание геометрические соотношения из уравнений (1.12), с учетом формул (2.1), для изгибов-кручений χ_{ij} получим:

$$\chi_{ij} = \kappa_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, t) = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_i \qquad (2.16)$$

Из тех же уравнений (1.12), рассматривая физические соотношения, для моментных напряжений μ_{ij} будем иметь:

$$\mu_{ij} = (\gamma + \varepsilon)\kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\kappa_{ji} \qquad (2.17)$$

Рассматривая геометрическое уравнение из (1.11) для χ_{33}, с учетом соотношений (2.1) получим:

$$\chi_{33} = \iota(\alpha_1, \alpha_2, t) \qquad (2.18)$$

Рассматривая физическое уравнение из (1.11), с учетом соотношений (2.15) получим:

$$\mu_{33}^{0}=(\beta+2\gamma)\iota+\beta(\kappa_{11}+\kappa_{22}) \tag{2.19}$$

Принимая в виду геометрические уравнения из (1.13) для χ_{3i} и χ_{i3}, с учетом соотношений (2.1), будем иметь:

$$\chi_{3i}=0\,,\ \chi_{i3}=\alpha_3 l_{i3}(\alpha_1,\alpha_2,t)\,,\ l_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_i} \tag{2.20}$$

Кроме того, из тех же уравнений (1.13), если взять физические уравнения и учесть соотношения (2.20), а также соответствующие формулы величин μ_{3i}, для моментных напряжений μ_{i3} получим следующие формулы:

$$\mu_{i3}=\alpha_3\left(\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\widetilde{m}_i}{h}\right) \tag{2.21}$$

Рассмотрим уравнения движения (1.3). С учетом предположения 3) и формулы (2.21), для моментных напряжений μ_{3i} будем иметь линейное распределение по толщине пластинки:

$$\begin{gathered}\mu_{3i}=-\alpha_3\left[\frac{1}{A_i}\frac{\partial\mu_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}(\mu_{ii}-\mu_{jj})+\right.\\ \left.+\frac{1}{A_j}\frac{\partial\mu_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}(\mu_{ji}+\mu_{ij})+(-1)^j(\sigma_{j3}-\sigma_{3j})-J\frac{\partial^2\Omega_i}{\partial t^2}\right]\end{gathered} \tag{2.22}$$

Теперь, когда все величины определены, перейдем к выполнению второй части предположения 3). Приступим к полному определению силовых касательных напряжений σ_{3i} и моментного нормального напряжения μ_{33}.

Для этого рассмотрим уравнения движения (1.1). После интегрирования по α_3, получим

$$\begin{gathered}\sigma'_{3i}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t)=\hat{\sigma}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2,t)-\frac{\alpha_3^2}{2}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\hat{\sigma}_{ii}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}(\hat{\sigma}_{ii}-\hat{\sigma}_{jj})+\right.\\ \left.+\frac{1}{A_2}\frac{\partial\hat{\sigma}_{ji}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}(\hat{\sigma}_{ji}+\hat{\sigma}_{ij})-\rho\frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2}\right)\end{gathered} \tag{2.23}$$

По предположению 3), будем требовать от величин (2.23) выполнения условий

$$\int_{-h}^{h}\sigma'_{3i}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t)d\alpha_3=0 \tag{2.24}$$

Удовлетворяя условия (2.24), в итоге определим величины $\hat{\sigma}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2,t)$. Определяя таким образом $\hat{\sigma}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2,t)$ и подставляя их в (2.23), получим значения для $\sigma'_{3i}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t)$.

Теперь по предположению 3), окончательно для σ_{3i} будем иметь:

$$\sigma_{3i}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t)=\sigma^0_{3i}(\alpha_1,\alpha_2,t)+\left(h^2/6-\alpha_3^2/2\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\hat{\sigma}_{ii}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}(\hat{\sigma}_{ii}-\hat{\sigma}_{jj})+\frac{1}{A_2}\frac{\partial\hat{\sigma}_{ji}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}(\hat{\sigma}_{ji}+\hat{\sigma}_{ij})-\rho\frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2}\right) \qquad (2.25)$$

Формулы (2.25) дают распределение силовых напряжений σ_{3i} по толщине пластинки (квадратичный закон).

Рассмотрим уравнение движения (1.4). После интегрирования по α_3, получим

$$\mu'_{33}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t)=\hat{\mu}_{33}(\alpha_1,\alpha_2,t)-\frac{\alpha_3^2}{2}\left[\frac{1}{A_1}\frac{\partial\hat{\mu}_{13}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\hat{\mu}_{13}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{A_2}\frac{\partial\hat{\mu}_{23}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\hat{\mu}_{23}+(\hat{\sigma}_{12}-\hat{\sigma}_{21})-J\frac{\partial^2\iota}{\partial t^2}\right] \qquad (2.26)$$

По предположению 3), потребуем от величин (2.26) выполнения условия

$$\int_{-h}^{h}\mu'_{33}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t)d\alpha_3=0 \qquad (2.27)$$

Удовлетворяя условие (2.27), в итоге определим величину $\hat{\mu}_{33}(\alpha_1,\alpha_2,t)$, подставим ее в (2.26), получим значение для $\mu'_{33}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t)$.

Теперь по предположению 3), окончательным образом, для значения μ_{33} будем иметь:

$$\mu_{33}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t)=\mu^0_{33}(\alpha_1,\alpha_2,t)+\left(\frac{h^2}{6}-\frac{\alpha_3^2}{2}\right)\left[\frac{1}{A_1}\frac{\partial\hat{\mu}_{13}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\hat{\mu}_{13}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{A_2}\frac{\partial\hat{\mu}_{23}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\hat{\mu}_{23}+(\hat{\sigma}_{12}-\hat{\sigma}_{21})-J\frac{\partial^2\iota}{\partial t^2}\right] \qquad (2.28)$$

Формулы (2.28) дают распределение моментного напряжения μ_{33} по толщине пластинки (квадратичный закон).

Принимая в виду соответствующие граничные условия (1.14), при помощи формул (2.13) и (2.22) для нормального силового напряжения σ_{33} и моментных напряжений μ_{3i} будем иметь:

$$\sigma_{33}=-\alpha_3\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\sigma_{13}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\sigma_{23}-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)=\frac{\alpha_3}{h}\widetilde{p}_3$$

$$\mu_{3i}=-\alpha_3\left[\frac{1}{A_i}\frac{\partial\mu_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}(\mu_{ii}-\mu_{jj})+\right. \tag{2.29}$$

$$\left.+\frac{1}{A_j}\frac{\partial\mu_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}(\mu_{ji}+\mu_{ij})+(-1)^j(\sigma_{j3}-\sigma_{3j})-J\frac{\partial^2\Omega_i}{\partial t^2}\right]=\frac{\alpha_3}{h}\widetilde{m}_i$$

С целью приведения трехмерной задачи (1.1)-(1.13) к двумерной, вместо компонент тензоров силового и моментного напряжений, перейдем к статически эквивалентным интегральным по толщине пластинки характеристикам:

$$T_{ii}=\int_{-h}^{h}\sigma_{ii}d\alpha_3,\; S_{ij}=\int_{-h}^{h}\sigma_{ij}d\alpha_3,\; N_{i3}=\int_{-h}^{h}\sigma_{i3}d\alpha_3\ (i\leftrightarrow 3),\; M_{ii}=\int_{-h}^{h}\sigma_{ii}\alpha_3 d\alpha_3$$

$$M_{ij}=\int_{-h}^{h}\sigma_{ij}\alpha_3 d\alpha_3,\; L_{mn}=\int_{-h}^{h}\mu_{mn}d\alpha_3, (m,n=1,2,3),\; \Lambda_{i3}=\int_{-h}^{h}\mu_{i3}d\alpha_3\ (i\leftrightarrow 3)$$

Итак, основная система уравнений модели динамического изгиба микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений будет выражаться следующим образом:

Уравнения движения

$$\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2N_{13})}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial(A_1N_{23})}{\partial\alpha_2}\right]=2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2\widetilde{p}_3$$

$$N_{3i}-\left(\frac{1}{A_i}\frac{\partial M_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}(M_{ii}-M_{jj})+\frac{1}{A_j}\frac{\partial M_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}(M_{ji}+M_{ij})\right)+$$

$$+\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2}=2h\widetilde{p}_i$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial L_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}(L_{ii}-L_{jj})+\frac{1}{A_j}\frac{\partial L_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}(L_{ji}+L_{ij})+$$

$$+(-)^j(N_{j3}-N_{3j})=2Jh\frac{\partial^2\Omega_i}{\partial t^2}-2\widetilde{m}_i \tag{2.30}$$

$$L_{33}-\left[\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2\Lambda_{13})}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial(A_1\Lambda_{23})}{\partial\alpha_2}\right]+(M_{12}-M_{21})\right]+\frac{2Jh^3}{3}\frac{\partial^2\iota}{\partial t^2}=2h\widetilde{m}_3$$

Физические соотношения

$$N_{i3}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{i3}+(\mu-\alpha)\Gamma_{3i}],\; N_{3i}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{3i}+(\mu-\alpha)\Gamma_{i3}]$$

$$M_{ii}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{ii}+\nu K_{jj}),M_{ij}=\frac{2h^3}{3}[(\mu+\alpha)K_{ij}+(\mu-\alpha)K_{ji}] \quad (2.31)$$

$$L_{ii}=2h\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\kappa_{ii}+\frac{2\beta\gamma}{\beta+2\gamma}\kappa_{jj}\right]+\frac{\beta}{\beta+2\gamma}L_{33},L_{ij}=2h[(\gamma+\varepsilon)\kappa_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\kappa_{ji}]$$

$$\Lambda_{i3}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\tilde{m}_i}{h}\right],L_{33}=2h[(\beta+2\gamma)\iota+\beta(\kappa_{11}+\kappa_{22})]$$

Геометрические соотношения

$$K_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_j,\quad K_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_i-(-1)^j\iota$$

$$\Gamma_{3i}=\psi_i-(-1)^j\Omega_j,\ \ \Gamma_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}+(-1)^j\Omega_j \quad (2.32)$$

$$\kappa_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_j,\quad \kappa_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i,\quad l_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_i}$$

К системе уравнений (2.30)-(2.32) микрополярных упругих тонких пластин присоединим “смягченные” граничные условия на граничном контуре Γ срединной плоскости пластинки (например, при $\alpha_1=const$):

$$M_{11}=M_{11}^* \text{ или } K_{11}=K_{11}^*,\ M_{12}=M_{12}^* \text{ или } K_{12}=K_{12}^*, N_{13}=N_{13}^* \text{ или } w=w^*$$

$$L_{11}=L_{11}^* \text{ или } \kappa_{11}=\kappa_{11}^*,\ L_{12}=L_{12}^* \text{ или } \kappa_{12}=\kappa_{12}^*,\ \ \Lambda_{13}=\Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13}=l_{13}^* \quad (2.33)$$

К системе основных уравнений микрополярных пластин со свободным вращением (2.30)-(2.32) и граничным условиям (2.33) присоединим также соответствующие начальные условия для $w,\frac{\partial w}{\partial t},\psi_i,\frac{\partial\psi_i}{\partial t},\Omega_i,\frac{\partial\Omega_i}{\partial t}\ \iota,\frac{\partial\iota}{\partial t}$.

Система уравнений (2.30)-(2.32), граничные условия (2.33) и указанные начальные условия представляют собой математическую модель микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений, при которой полностью учитывались поперечные сдвиговые и родственные им деформации. Это система 12-ого порядка с 6-ю граничными условиями на каждом краю срединной плоскости пластинки. Она содержит 35 уравнений относительно 35 неизвестных функций: $N_{i3},N_{3i},M_{ii},M_{ij},L_{ii},L_{ij},\Lambda_{i3},L_{33},\Gamma_{i3},\Gamma_{3i},K_{ii},K_{ij}$, $\kappa_{ii},\kappa_{ij},l_{i3},\psi_i,w,\Omega_i,\iota$.Можно констатировать, что построенная модель микрополярных упругих пластин имеет математическое (асимптотическое) обоснование.

Отметим, что при $\alpha=0$, из системы (2.30)-(2.32), граничных условий (2.33) и из указанных начальных условий отделяется система уравнений, граничные и начальные условия классической теории упругих пластин типа Тимошенко

[12,13] (с некоторым несущественным отличием, обусловленной статической гипотезой 3)).

Основные уравнения микрополярных пластин со свободным вращением в декартовых координатах $(A_1 = A_2 = 1)$ относительно w, ψ_i, Ω_i и ι выражаются так:

$$(\mu+\alpha)\nabla^2 w + (\mu-\alpha)\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right) + 2\alpha\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}\right) = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\tilde{p}_3}{h}$$

$$(\mu+\alpha)\psi_1 + (\mu-\alpha)\frac{\partial w}{\partial x_1} - 2\alpha\Omega_2 - \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}\left[\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1\partial x_2}\right] -$$

$$-\frac{h^2}{3}\left[(\mu+\alpha)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_2^2} + (\mu-\alpha)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1\partial x_2} + 2\alpha\frac{\partial\iota}{\partial x_2}\right] + \frac{\rho h^2}{3}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} = \tilde{p}_1$$

$$(\mu+\alpha)\psi_2 + (\mu-\alpha)\frac{\partial w}{\partial x_2} + 2\alpha\Omega_1 - \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}\left[\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1\partial x_2}\right] -$$

$$-\frac{h^2}{3}\left[(\mu+\alpha)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1^2} + (\mu-\alpha)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1\partial x_2} - 2\alpha\frac{\partial\iota}{\partial x_1}\right] + \frac{\rho h^2}{3}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} = \tilde{p}_2$$

$$(\beta+2\gamma)\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial x_1^2} + (\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial x_2^2} + (\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial x_1\partial x_2} + 2\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2 - 2\Omega_1\right) +$$

$$+\beta\frac{\partial\iota}{\partial x_1} = J\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial t^2} - \frac{\tilde{m}_1}{h} \tag{2.34}$$

$$(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial x_1^2} + (\beta+2\gamma)\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial x_2^2} + (\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial x_1\partial x_2} - 2\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} - \psi_1 + 2\Omega_2\right) +$$

$$+\beta\frac{\partial\iota}{\partial x_2} = J\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial t^2} - \frac{\tilde{m}_2}{h}$$

$$(\beta+2\gamma)\iota + \beta\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\Omega_2}{\partial x_2}\right) - \frac{h^2}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\nabla^2\iota - 2\alpha\frac{h^2}{3}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} - 2\iota\right) + \frac{Jh^2}{3}\frac{\partial^2\iota}{\partial t^2} = \tilde{m}_3$$

∇^2 -двумерный оператор Лапласа $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

Если в уравнениях (2.30)-(2.32) пренебрегать моменты M_{ii}, M_{ij} и гипермоменты Λ_{i3}, а также ими обусловленные инерционные члены $\dfrac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2}$ и $\dfrac{\partial^2\iota}{\partial t^2}$, то в результате получим упрощенную модель микрополярных пластин [10,11,14].

Основная система уравнений упрощенной динамической модели изгибной деформации микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений выражается следующим образом:

Уравнения движения

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial N_{13}}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}N_{13}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial N_{23}}{\partial \alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}N_{23}=2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2\tilde{p}_3$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}(L_{ii}-L_{jj})+\frac{1}{A_j}\frac{\partial L_{ji}}{\partial \alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}(L_{ji}+L_{ij})+ \tag{2.35}$$

$$+(-1)^j(N_{j3}-N_{3j})=2Jh\frac{\partial^2\Omega_i}{\partial t^2}-2\tilde{m}_i$$

Физические соотношения

$$N_{i3}=2h\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\Gamma_{i3}+\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}N_{3i},\ N_{3i}=2h\tilde{p}_i,\ L_{ij}=2h[(\gamma+\varepsilon)\kappa_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\kappa_{ji}]$$

$$L_{ii}=2h\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\kappa_{ii}+\frac{2\beta\gamma}{\beta+2\gamma}\kappa_{jj}\right]+\frac{\beta}{\beta+2\gamma}L_{33},\ L_{33}=2h\tilde{m}_3 \tag{2.36}$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial \alpha_i}+(-1)^j\Omega_j,$$

$$\kappa_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_j,\ \kappa_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_i \tag{2.37}$$

К системе уравнений (2.35)-(2.37) микрополярных упругих тонких пластин присоединим “смягченные” граничные условия на граничном контуре Γ срединной плоскости пластинки (например, при $\alpha_1=const$):

$$N_{13}=N_{13}^*\quad \text{или}\ w=w^*,\quad L_{11}=L_{11}^*\quad \text{или}\ \kappa_{11}=\kappa_{11}^*,$$

$$L_{12}=L_{12}^*\ \text{или}\ \kappa_{12}=\kappa_{12}^* \tag{2.38}$$

Начальные условия необходимо задать для $w,\dfrac{\partial w}{\partial t},\Omega_i,\dfrac{\partial \Omega_i}{\partial t}$.

В декартовых координатах $(A_1=A_2=1)$ основные уравнения микрополярных пластин со свободным вращением относительно перемещения w и поворотов Ω_i примут вид:

$$\left(\nabla^2-\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)w-\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}+\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}=-\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\frac{\tilde{p}_3}{h}$$

$$\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\frac{\partial w}{\partial x_2}+\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}-J\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\Omega_1+ \tag{2.39}$$

$$+\left[\frac{2\beta\gamma}{\beta+2\gamma}+\gamma-\varepsilon\right]\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial x_1\partial x_2}=-\frac{\tilde{m}_1}{h}$$

$$
-\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\frac{\partial w}{\partial x_1}+\left[\frac{2\beta\gamma}{\beta+2\gamma}+\gamma-\varepsilon\right]\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial x_1\partial x_2}+
$$

$$
+\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}-J\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\Omega_2=-\frac{\widetilde{m}_2}{h}
$$

3. Задача о распространении волн в бесконечном слое по микрополярной теории упругости со свободным вращением. Рассмотрим упругий слой толщиной $2h$ $(S\{x_1,x_2,x_3\}:\ -\infty<x_1,x_2<\infty,\ |x_3|\le h)$ с ограничивающими плоскостями $x_3=\pm h$, свободными от силовых и моментных напряжений. Рассмотрим пространственную задачу трехмерной несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений (1.1)-(1.13), когда имеем декартовые координаты ($H_1=H_2=H_3=1$). К этим уравнениям следует присоединить граничные условия на плоскостях $x_3=\pm h$

$$
\sigma_{3n}=0,\ \mu_{3n}=0,\ n=1,2,3 \tag{3.1}
$$

Основные уравнения микрополярной теории упругости (1.1)-(1.13) можем легко привести к следующей системе относительно вектора перемещения $\vec{V}$ и вектора независимого поворота $\vec{\omega}$:

$$
\begin{aligned}
&L_1\vec{V}+(\lambda+\mu-\alpha)graddiv\vec{V}+2\alpha\, rot\vec{\omega}=0\\
&L_2\vec{\omega}+(\beta+\gamma-\varepsilon)graddiv\vec{\omega}+2\alpha\, rot\vec{V}=0
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&L_1=(\mu+\alpha)\nabla^2-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2},\quad L_2=(\gamma+\varepsilon)\nabla^2-4\alpha-J\frac{\partial^2}{\partial t^2}\\
&\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Далее, из уравнений (3.2) можем получить (в компонентном виде):

$$
(L_1L_2+4\alpha^2\nabla^2)V_n+(L_2(\lambda+\mu-\alpha)-4\alpha^2)\frac{\partial\theta}{\partial x_n}=0 \tag{3.4}
$$

$$
L_2(L_1L_2+4\alpha^2\nabla^2)\omega_n+(\beta+\gamma-\varepsilon)(L_1L_2+4\alpha^2\nabla^2)\frac{\partial\Theta}{\partial x_n}=0 \tag{3.5}
$$

где

$$
\theta=div\vec{V},\quad \Theta=div\vec{\omega} \tag{3.6}
$$

Зададим перемещения и повороты следующим образом [6]:

$$
V_1=\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\frac{\partial\phi_3}{\partial x_2}-\frac{\partial\phi_2}{\partial x_3},\quad V_2=\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+\frac{\partial\phi_1}{\partial x_3}-\frac{\partial\phi_3}{\partial x_1},\quad V_3=\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+\frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}-\frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} \tag{3.7}
$$

$$\omega_1 = \frac{\partial O}{\partial x_1} + \frac{\partial o_3}{\partial x_2} - \frac{\partial o_2}{\partial x_3}, \quad \omega_2 = \frac{\partial O}{\partial x_2} + \frac{\partial o_1}{\partial x_3} - \frac{\partial o_3}{\partial x_1}, \quad \omega_3 = \frac{\partial O}{\partial x_3} + \frac{\partial o_2}{\partial x_1} - \frac{\partial o_1}{\partial x_2} \tag{3.8}$$

где Φ и O -скаляры, а векторы $\vec{\phi}(\phi_1,\phi_2,\phi_3)$, $\vec{o}(o_1,o_2,o_3)$ удовлетворяют уравнениям:

$$div\vec{\phi} = 0\,,\; div\vec{o} = 0 \tag{3.9}$$

тогда система уравнений (3.4),(3.5) динамической теории трехмерной задачи несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений можем привести к более удобному виду (для дальнейшего построения точного решения поставленной задачи):

$$\begin{gathered}\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi = 0\,, \left[\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\nabla^2 - \nu_0^2 - \frac{1}{c_4^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) + \eta_0^2\nabla^2\right]\phi_n = 0 \\ \left(\nabla^2 - \nu_1^2 - \frac{1}{c_3^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)O = 0, \left[\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\nabla^2 - \nu_0^2 - \frac{1}{c_4^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) + \eta_0^2\nabla^2\right]o_n = 0\end{gathered} \tag{3.10}$$

где

$$\begin{gathered}c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu + \alpha}{\rho}}, \quad c_3 = \sqrt{\frac{\beta + 2\gamma}{J}}, \quad c_4 = \sqrt{\frac{\gamma + \varepsilon}{J}} \\ \nu_0 = \sqrt{\frac{4\alpha}{\gamma + \varepsilon}}, \quad \nu_1 = \sqrt{\frac{4\alpha}{\beta + 2\gamma}}, \quad \eta_0 = \frac{2\alpha}{\sqrt{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)}}\end{gathered} \tag{3.11}$$

К уравнениям (3.10) следует присоединить граничные условия (3.1).

Решение системы уравнений (3.10) будем искать в виде гармонических волн [6]

$$\begin{gathered}\Phi = \Phi^*(x_3)e^{i(\xi x_1 + \eta x_2 - pt)}, \quad \phi_n = \phi_n^*(x_3)e^{i(\xi x_1 + \eta x_2 - pt)} \\ O = O^*(x_3)e^{i(\xi x_1 + \eta x_2 - pt)}, \quad o_n = o_n^*(x_3)e^{i(\xi x_1 + \eta x_2 - pt)}\end{gathered} \tag{3.12}$$

где ξ, η -волновые числа в направлениях x_1, x_2, p -частота колебаний.

Подставляя (3.12) в (3.10) приходим к решению отдельных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $\Phi^*(x_3), \phi_n^*(x_3)$, $O^*(x_3), o_n^*(x_3)$:

$$\frac{d^2\Phi^*}{dx_3^2} - k^2\Phi^* = 0, \quad \frac{d^2O^*}{dx_3^2} - K^2O^* = 0 \tag{3.13}$$

$$\begin{gathered}\frac{d^4\phi_n^*}{dx_3^4} - \left[2(\xi^2 + \eta^2) + \nu_0^2 - \eta_0^2 - \frac{p^2}{c_2^2} - \frac{p^2}{c_4^2}\right]\frac{d^2\phi_n^*}{dx_3^2} + \\ + \left[(\xi^2 + \eta^2)^2 + (\xi^2 + \eta^2)\left(\nu_0^2 - \eta_0^2 - \frac{p^2}{c_2^2} - \frac{p^2}{c_4^2}\right) - \frac{p^2}{c_2^2}\left(\nu_0^2 - \frac{p^2}{c_4^2}\right)\right]\phi_n^* = 0\end{gathered} \tag{3.14}$$

$$\frac{d^4 o_n^*}{dx_3^4} - \left[2(\xi^2+\eta^2)+v_0^2-\eta_0^2-\frac{p^2}{c_2^2}-\frac{p^2}{c_4^2}\right]\frac{d^2 o_n^*}{dx_3^2}+$$
$$+\left[(\xi^2+\eta^2)^2+(\xi^2+\eta^2)\left(v_0^2-\eta_0^2-\frac{p^2}{c_2^2}-\frac{p^2}{c_4^2}\right)-\frac{p^2}{c_2^2}\left(v_0^2-\frac{p^2}{c_4^2}\right)\right]o_n^*=0 \tag{3.15}$$

где $k=\sqrt{\xi^2+\eta^2-\dfrac{p^2}{c_1^2}}, \quad K=\sqrt{\xi^2+\eta^2+v_1^2-\dfrac{p^2}{c_3^2}}$ (3.16)

Общие решения отдельных дифференциальных уравнений (3.13)-(3.15) (для обратно-симметричной относительно координаты x_3 задачи, т. е. для задачи динамического изгиба слоя) можем представить в следующем виде:

$$\Phi^*(x_3)=A_1 sh(kx_3),\ \ O^*(x_3)=B_1 ch(Kx_3) \tag{3.17}$$
$$\phi_1^*(x_3)=A_2 ch(k_1x_3)+B_2 ch(k_2x_3),\ o_1^*(x_3)=A_5 sh(k_1x_3)+B_5 sh(k_2x_3) \tag{3.18}$$
$$\phi_2^*(x_3)=A_3 ch(k_1x_3)+B_3 ch(k_2x_3),\ o_2^*(x_3)=A_6 sh(k_1x_3)+B_6 sh(k_2x_3) \tag{3.19}$$
$$\phi_3^*(x_3)=A_4 sh(k_1x_3)+B_4 sh(k_2x_3),\ o_3^*(x_3)=A_7 ch(k_1x_3)+B_7 ch(k_2x_3) \tag{3.20}$$

где

$$k_{1,2}^2=(\xi^2+\eta^2)+$$
$$+\frac{1}{2}\left[v_0^2-\eta_0^2-\frac{p^2}{c_2^2}-\frac{p^2}{c_4^2}\pm\sqrt{\left(v_0^2-\eta_0^2-\frac{p^2}{c_2^2}-\frac{p^2}{c_4^2}\right)^2+4\frac{p^2}{c_2^2}\left(v_0^2-\frac{p^2}{c_4^2}\right)}\right] \tag{3.21}$$

A_s, B_s $(s=1,2,3,4,5,6,7)$-произвольные постоянные.

Удовлетворяя условия (3.9), получим:

$$A_4=-i\frac{\xi A_2+\eta A_3}{k_1}, B_4=-i\frac{\xi B_2+\eta B_3}{k_2}, A_7=-i\frac{\xi A_5+\eta A_6}{k_1}, B_7=-i\frac{\xi B_5+\eta B_6}{k_2} \tag{3.22}$$

Далее, полученные решения для функций Φ, ϕ_n, O, o_n подставим в (3.7),(3.8), а затем удовлетворим уравнениям (3.2). В результате будем иметь

$$A_5=\frac{T_1}{k_1}(\xi\eta A_2+(\eta^2-k_1^2)A_3), \quad B_5=\frac{T_2}{k_2}(\xi\eta B_2+(\eta^2-k_2^2)B_3)$$
$$A_6=\frac{T_1}{k_1}((k_1^2-\xi^2)A_2-\xi\eta A_3), \quad B_6=\frac{T_2}{k_2}((k_2^2-\xi^2)B_2-\xi\eta B_3) \tag{3.23}$$

$$A_2=\frac{K_1}{k_1}(\xi\eta A_5+(\eta^2-k_1^2)A_6), \quad B_2=\frac{K_2}{k_2}(\xi\eta B_5+(\eta^2-k_2^2)B_6)$$
$$A_3=\frac{K_1}{k_1}((k_1^2-\xi^2)A_5-\xi\eta A_6), \quad B_3=\frac{K_2}{k_2}((k_2^2-\xi^2)B_5-\xi\eta B_6) \tag{3.24}$$

где

$$T_1=\frac{\mu+\alpha}{2\alpha}\frac{k_1^2-\xi^2-\eta^2+\dfrac{p^2}{c_2^2}}{k_1^2-\xi^2-\eta^2},\quad T_2=\frac{\mu+\alpha}{2\alpha}\frac{k_2^2-\xi^2-\eta^2+\dfrac{p^2}{c_2^2}}{k_2^2-\xi^2-\eta^2} \tag{3.25}$$

$$K_1=\frac{\gamma+\varepsilon}{2\alpha}\frac{k_1^2-\xi^2-\eta^2-\nu_0^2+\dfrac{p^2}{c_4^2}}{k_1^2-\xi^2-\eta^2},\quad K_2=\frac{\gamma+\varepsilon}{2\alpha}\frac{k_2^2-\xi^2-\eta^2-\nu_0^2+\dfrac{p^2}{c_4^2}}{k_2^2-\xi^2-\eta^2} \tag{3.26}$$

Можем убедиться, что соотношения (3.23) и (3.24) равносильны, поскольку k_1, k_2 имеют вид (3.21). В результате остаются шесть произвольных постоянных.

Отметим, что из полученных соотношений получаются следующие зависимости, которые используются в дальнейшем:

$$T_1K_1(k_1^2-\xi^2-\eta^2)=-1,\qquad T_2K_2(k_2^2-\xi^2-\eta^2)=-1 \tag{3.27}$$

В качестве произвольных постоянных выберем A_n, B_n $(n=1,2,3)$. Имея ввиду соотношения (3.22)-(3.27), можем представить функции Φ, ϕ_n, O, o_n через выбранные произвольные постоянные. Теперь из (3.7),(3.8) легко получим выражения для перемещений и поворотов:

$$V_1=\left[i\xi A_1 sh(kx_3)+\xi\eta\left(\frac{A_2}{k_1}sh(k_1x_3)+\frac{B_2}{k_2}sh(k_2x_3)\right)+\frac{\eta^2-k_1^2}{k_1}A_3 sh(k_1x_3)+\right.$$
$$\left.+\frac{\eta^2-k_2^2}{k_2}B_3 sh(k_2x_3)\right]e^{i(\xi x_1+\eta x_2-pt)} \tag{3.28}$$

$$V_2=\left[i\eta A_1 sh(kx_3)+\frac{k_1^2-\xi^2}{k_1}A_2 sh(k_1x_3)+\frac{k_2^2-\xi^2}{k_2}B_2 sh(k_2x_3)-\right.$$
$$\left.-\xi\eta\left(\frac{A_3}{k_1}sh(k_1x_3)+\frac{B_3}{k_2}sh(k_2x_3)\right)\right]e^{i(\xi x_1+\eta x_2-pt)} \tag{3.29}$$

$$V_3=[A_1kch(kx_3)-i\eta(A_2ch(k_1x_3)+B_2ch(k_2x_3))+$$
$$+i\xi(A_3ch(k_1x_3)+B_3ch(k_2x_3))]e^{i(\xi x_1+\eta x_2-pt)} \tag{3.30}$$

$$\omega_1=\left[i\xi B_1ch(Kx_3)+\frac{A_2}{K_1}ch(k_1x_3)+\frac{B_2}{K_2}ch(k_2x_3)\right]e^{i(\xi x_1+\eta x_2-pt)} \tag{3.31}$$

$$\omega_2=\left[i\eta B_1ch(Kx_3)+\frac{A_3}{K_1}ch(k_1x_3)+\frac{B_3}{K_2}ch(k_2x_3)\right]e^{i(\xi x_1+\eta x_2-pt)} \tag{3.32}$$

$$\omega_3=\left[B_1Ksh(Kx_3)-i\frac{1}{K_1k_1}(\xi A_2+\eta A_3)sh(k_1x_3)-\right.$$
$$\left.-i\frac{1}{K_2k_2}(\xi B_2+\eta B_3)sh(k_2x_3)\right]e^{i(\xi x_1+\eta x_2-pt)} \tag{3.33}$$

Далее, используя соответствующие формулы, получим выражения для величин силовых и моментных напряжений $\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}, \mu_{31}, \mu_{32}, \mu_{33}$, а из граничных условий (3.1), в результате некоторых преобразований, получим алгебраическую однородную линейную систему относительно постоянных A_n, B_n:

$$
\begin{gathered}
(i2\mu\xi k ch(kh))A_1 + (2\mu\xi\eta\, ch(k_1h))A_2 + \\
+(2\mu\xi\eta\, ch(k_2h))B_2 + (-2\mu\xi^2 + (\mu+\alpha)\, p^2/c_2^2)ch(k_1h)A_3 + \\
+(-2\mu\xi^2 + (\mu+\alpha)\, p^2/c_2^2)ch(k_2h)B_3 + (-i2\alpha\eta\, ch(Kh))B_1 = 0 \\
(i2\mu\eta k ch(kh))A_1 + (2\mu\eta^2 - (\mu+\alpha)\, p^2/c_2^2)ch(k_1h)A_2 + \\
+(2\mu\eta^2 - (\mu+\alpha)\, p^2/c_2^2)ch(k_2h)B_2 + \\
+(-2\mu\xi\eta\, ch(k_1h))A_3 + (-2\mu\xi\eta\, ch(k_2h))B_3 + (i2\alpha\xi ch(Kh))B_1 = 0 \\
[(\lambda+2\mu)k^2 - \lambda(\xi^2+\eta^2)]sh(kh)A_1 + (-i2\mu\eta k_1 sh(k_1h))A_2 + \\
+(-i2\mu\eta k_2 sh(k_2h))B_2 + (i2\mu\xi k_1 sh(k_1h))A_3 + (i2\mu\xi k_2 sh(k_2h))B_3 = 0 \\
\frac{1}{K_1k_1}[(\gamma-\varepsilon)\xi^2 + (\gamma+\varepsilon)k_1^2]sh(k_1h)A_2 + \frac{1}{K_2k_2}[(\gamma-\varepsilon)\xi^2 + (\gamma+\varepsilon)k_2^2]sh(k_2h)B_2 + \\
+\frac{1}{K_1k_1}\xi\eta(\gamma-\varepsilon)sh(k_1h)A_3 + \frac{1}{K_2k_2}\xi\eta(\gamma-\varepsilon)sh(k_2h)B_3 + (i2\gamma\xi K sh(Kh))B_1 = 0 \\
\frac{1}{K_1k_1}\xi\eta(\gamma-\varepsilon)sh(k_1h)A_2 + \frac{1}{K_2k_2}\xi\eta(\gamma-\varepsilon)sh(k_2h)B_2 + \\
+\frac{1}{K_1k_1}[(\gamma-\varepsilon)\eta^2 + (\gamma+\varepsilon)k_1^2]sh(k_1h)A_3 + \\
+\frac{1}{K_2k_2}[(\gamma-\varepsilon)\eta^2 + (\gamma+\varepsilon)k_2^2]sh(k_2h)B_3 + (i2\gamma\eta K sh(Kh))B_1 = 0 \\
-i2\gamma\xi\frac{1}{K_1}ch(k_1h)A_2 - i2\gamma\xi\frac{1}{K_2}ch(k_2h)B_2 - i2\gamma\eta\frac{1}{K_1}ch(k_1h)A_3 - \\
-i2\gamma\eta\frac{1}{K_2}ch(k_2h)B_3 + [(\beta+2\gamma)K^2 - \beta(\xi^2+\eta^2)]ch(Kh)B_1 = 0
\end{gathered}
\tag{3.34}
$$

Система этих уравнений будет иметь ненулевое решение, если ее определитель равна нулю. В итоге, после довольно громоздких преобразований, приходим к следующему трансцендентному уравнению:

$$
\begin{gathered}
F_1 th(kh)(th(k_2h))^2 + F_2 th(kh)th(k_1h)th(k_2h) + F_3 th(k_1h)(th(k_2h))^2 + \\
+F_4 th(kh)(th(k_1h))^2 + F_5(th(k_1h))^2 th(k_2h) + F_6 th(kh)th(k_2h)th(Kh) + \\
+F_7 th(kh)th(k_1h)th(Kh) + F_8 th(k_1h)th(k_2h)th(Kh) = 0
\end{gathered}
\tag{3.35}
$$

где

$$
\begin{aligned}
F_1 = {} & \frac{1}{4}(\xi^2+\eta^2-k_1^2-p^2/c_2^2)^2((\mu+\alpha)\,p^2/c_2^2 - 2\mu(\xi^2+\eta^2))\times \\
& \times((\lambda+2\mu)k^2 - \lambda(\xi^2+\eta^2))((\gamma+\varepsilon)k_2^2 + (\gamma-\varepsilon)(\xi^2+\eta^2))\times \\
& \times[-2\gamma c_2^2(\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2-k_1^2) + p^2(\beta+2\gamma)(\xi^2+\eta^2-K^2)]
\end{aligned}
$$

$$F_2=\frac{1}{8\alpha k_1k_2}(\xi^2+\eta^2-k_1^2-p^2/c_2^2)^2(\xi^2+\eta^2-k_2^2-p^2/c_2^2)^2$$
$$\times((\lambda+2\mu)k^2-\lambda(\xi^2+\eta^2))((\mu+\alpha)p^2/c_2^2-2\mu(\xi^2+\eta^2))\times$$
$$\times\left\{\frac{4\alpha\gamma k_1^2c_2^2(\xi^2+\eta^2)((\gamma+\varepsilon)k_2^2+(\gamma-\varepsilon)(\xi^2+\eta^2))}{\xi^2+\eta^2-k_2^2-p^2/c_2^2}-\right.$$
$$-\frac{1}{\xi^2+\eta^2-k_1^2-p^2/c_2^2}\left[-4\alpha\gamma k_2^2c_2^2(\xi^2+\eta^2)((\gamma+\varepsilon)k_1^2+(\gamma-\varepsilon)(\xi^2+\eta^2))-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{2\alpha p^2((\gamma-\varepsilon)(\xi^2+\eta^2)(k_1^2+k_2^2)+2(\gamma+\varepsilon)k_1^2k_2^2)((\beta+2\gamma)K^2-\beta(\xi^2+\eta^2))}{\xi^2+\eta^2-k_2^2-p^2/c_2^2}\right]\right\}$$
$$F_3=\mu^2kk_1(k_1^2-k_2^2)(\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2-k_2^2-p^2/c_2^2)\times$$
$$\times((\gamma+\varepsilon)k_2^2+(\gamma-\varepsilon)(\xi^2+\eta^2))\times \tag{3.36}$$
$$\times[-2\gamma c_2^2(\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2-k_1^2)+p^2(\beta+2\gamma)(\xi^2+\eta^2-K^2)]$$
$$F_4=\frac{1}{4}((\mu+\alpha)p^2/c_2^2-2\mu(\xi^2+\eta^2))(\xi^2+\eta^2-k_1^2-p^2/c_2^2)^2\times$$
$$((\lambda+2\mu)k^2-\lambda(\xi^2+\eta^2))((\gamma+\varepsilon)k_1^2+(\gamma-\varepsilon)(\xi^2+\eta^2))\times$$
$$\times[-2\gamma c_2^2(\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2-k_1^2)+p^2(\beta+2\gamma)(\xi^2+\eta^2-K^2)]$$
$$F_5=-\mu^2kk_2(k_1^2-k_2^2)(\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2-k_1^2-p^2/c_2^2)\times$$
$$\times((\gamma+\varepsilon)k_1^2+(\gamma-\varepsilon)(\xi^2+\eta^2))\times$$
$$\times[-2\gamma c_2^2(\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2-k_2^2)+p^2(\beta+2\gamma)(\xi^2+\eta^2-K^2)]$$
$$F_6=p^2\gamma^2k_2K(k_1^2-k_2^2)(\xi^2+\eta^2)((\lambda+2\mu)k^2-\lambda(\xi^2+\eta^2))\times$$
$$\times(\xi^2+\eta^2-k_2^2-p^2/c_2^2)((\mu+\alpha)p^2/c_2^2-2\mu(\xi^2+\eta^2))$$
$$F_7=-p^2\gamma^2k_1K(k_1^2-k_2^2)(\xi^2+\eta^2)((\lambda+2\mu)k^2-\lambda(\xi^2+\eta^2))\times$$
$$\times(\xi^2+\eta^2-k_1^2-p^2/c_2^2)((\mu+\alpha)p^2/c_2^2-2\mu(\xi^2+\eta^2))$$
$$F_8=4p^2\mu^2\gamma^2kk_1k_2K(k_1^2-k_2^2)^2(\xi^2+\eta^2)^2$$

Если длина волны по сравнению с толщиной слоя велика (т.е. если рассмотрим низкочастотные длинноволновые колебания), то значения kh, k_1h, k_2h, Kh можно отнести к весьма малым и в уравнении (3.35), можем заменить гиперболические тангенсы их аргументами [15]. Таким образом, проведя некоторые выкладки для задачи изгиба слоя по трехмерной несимметричной теории упругости, из (3.35) получим следующее характеристическое уравнение

$$\left(-\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}(\xi^2+\eta^2)-\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}Jp^2\right)\times\Big[(\gamma+\varepsilon)(\xi^2+\eta^2)^2-$$
$$-\left(J+(\gamma+\varepsilon)\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\rho\right)(\xi^2+\eta^2)p^2-\rho p^2+J\rho\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}p^4\Big]=0 \tag{3.37}$$

Теперь рассмотрим определяющие уравнения упрощенной двумерной модели микрополярных пластин со свободным вращением, которые имеют вид (2.39) (в которых примем $\widetilde{p}_3=\widetilde{m}_1=\widetilde{m}_2=0$). Для изучения процесса распространения волн изгиба вдоль срединной плоскости пластинки по прикладной модели (2.39), представим решение указанной задачи в виде

$$w=\widetilde{A}e^{i(\xi x_1+\eta x_2-pt)},\qquad \Omega_1=\widetilde{B}e^{i(\xi x_1+\eta x_2-pt)},\qquad \Omega_2=\widetilde{C}e^{i(\xi x_1+\eta x_2-pt)} \tag{3.38}$$

Подставляя (3.38) в (2.39) и требуя ненулевое решение, в результате приходим к тому же характеристическому уравнению (3.37).

Далее, в характеристическом уравнении (3.35), используя разложение гиперболического тангенса в степенной ряд [15], оставим в этом разложении первые две члены. Проведя довольно громоздкие выкладки, получим достаточно сложное по виду и объемное по содержанию уравнение, которое можем написать в следующем эквивалентном компактном виде:

$$Det\left|a_{sl}\right|=0,\quad s,l=1,2,3,4,5,6 \tag{3.39}$$

где

$$a_{11}=\rho p^2-(\mu+\alpha)(\xi^2+\eta^2),a_{12}=i(\mu-\alpha)\xi,\ a_{13}=i(\mu-\alpha)\eta\ ,a_{14}=-i2\alpha\eta$$
$$a_{15}=i2\alpha\xi,a_{16}=0,\ a_{22}=\frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}\xi^2+\frac{h^2}{3}(\mu+\alpha)\eta^2-\frac{\rho h^2}{3}p^2+(\mu+\alpha)$$
$$a_{23}=\left(\frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}\nu+\frac{h^2}{3}(\mu-\alpha)\right)\xi\eta,\ \ a_{24}=0,\ \ a_{25}=-2\alpha,\ \ a_{26}=-i2\alpha\frac{h^2}{3}\eta$$
$$a_{33}=\frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}\eta^2+\frac{h^2}{3}(\mu+\alpha)\xi^2-\frac{\rho h^2}{3}p^2+(\mu+\alpha),\ \ a_{34}=2\alpha \tag{3.40}$$
$$a_{35}=0,\ a_{36}=i2\alpha\frac{h^2}{3}\xi\ ,a_{44}=-Jp^2+(\beta+2\gamma)\xi^2+(\gamma+\varepsilon)\eta^2+4\alpha$$
$$a_{45}=(\beta+\gamma-\varepsilon)\xi\eta,a_{46}=-i\beta\xi\ ,a_{55}=-Jp^2+(\beta+2\gamma)\eta^2+(\gamma+\varepsilon)\xi^2+4\alpha,a_{56}=-i\beta\eta$$
$$a_{66}=\frac{Jh^2}{3}p^2-(\beta+2\gamma)+\frac{h^2}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}(\xi^2+\eta^2)-4\alpha\frac{h^2}{3},\ a_{sl}=a_{ls},\ \ s,l=1,2,3,4,5,6$$

Теперь рассмотрим определяющие уравнения двумерной модели микрополярных пластин со свободным вращением (2.34) (в которых примем $\widetilde{p}_k=\widetilde{m}_k=0,\ k=1,2,3$), при которой полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации, а также, учитываются влияния усредненных моментов от силовых напряжений M_{ii} и M_{ij} .Для изучения процесса распространения волн изгиба вдоль срединной плоскости пластинки по этой модели, представим ее решение в виде

$$
\begin{aligned}
&w=\widetilde{A}e^{i(\xi x_1+\eta x_2-pt)}, \qquad \Omega_1=\widetilde{B}e^{i(\xi x_1+\eta x_2-pt)}, \qquad \Omega_2=\widetilde{C}e^{i(\xi x_1+\eta x_2-pt)} \\
&\psi_1=\widetilde{D}e^{i(\xi x_1+\eta x_2-pt)}, \qquad \psi_2=\widetilde{E}e^{i(\xi x_1+\eta x_2-pt)}, \qquad \iota=\widetilde{F}e^{i(\xi x_1+\eta x_2-pt)}
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

Подставляя (3.41) в (2.34) и требуя ненулевые решения, в результате получим характеристическое уравнение (3.39).

Таким образом, как при точном решении динамической задачи о расспространении плоской волны в тонком микрополярном бесконечном слое (в случае длинных волн), так и при решении той же задачи на основе соответствующих прикладных-двумерных моделей микрополярных пластин, приходим к одинаковым характеристическим уравнениям.

На основе полученного результата можем заключить, что прикладные модели, построенные применением асимптотического подхода и основанное на этом подходе метода гипотез, в сущности, адекватным образом заменяют трехмерную проблему.

Ա.Հ. Սարգսյան

Միկրոպոլյար առաձգական բարակ սալերի անկախ պտույտներով դինամիկ մոդելը

Աշխատանքում կառուցված է իզոտրոպ միկրոպոլյար առաձգական բարակ սալերի դինամիկ ծռման անկախ պտույտներով մոդելը: Ուսումնասիրված է միկրոպոլյար առաձգական եռաչափ շերտում ալիքների տարածման խնդիրը ինչպես խնդրի ճշգրիտ դրվածքով, այնպես էլ կառուցված կիրառական մոդելի հիման վրա: Ցույց է տրված, որ երկար ալիքների դեպքում ստացված բնութագրիչ հավասարումները համընկնում են:

A.H.Sargsyan

Dynamic Model of Micropolar Elastic Thin Plates with Independent Fields of Transitions and Rotations

In this paper the model of dynamic bending of isotropic micropolar elastic thin plates with independent fields of transitions and rotations are constructed. In exact statement of three-dimensional micropolar elasticity problem for a layer of the micropolar theory of elasticity with free rotation and on the basis of the constructed two-dimensional applied model of a micropolar plates the problem about wave distribution is studied. In case of long waves is shown coincidence of the characteristic equations of the wave distribution on the basis of both specified models.

Л и т е р а т у р а

1. *Саркисян С. О.* Микрополярная теория тонких стержней, пластин и оболочек.//Известия НАН Армении. Механика. 2005. Т. 58. № 2. С. 84-95.
2. *Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V. A.* 2009. "On generalized Cosserat-tape theories of plates and shells: a short review and bibliography". // Arch. Mech (Special Issue) DOI 10. 1007/s 00419-009-0365-3. Springer-Verlag.
3. *Саркисян С. О.* Прикладные теории микрополярных упругих тонких балок.// Доклады НАН РА. 2011. Т. 111. № 2.
4. *Саркисян С. О.* Общие математические модели микрополярных упругих тонких пластин.// Известия НАН Армении. Механика. 2011. Т. 64. № 1.
5. *Саркисян С. О.* Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек.// Доклады АН России. 2011. Т. 436. № 2. С. 195-198.
6. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир. 1975. 862с.
7. Пальмов В. А. Основные уравнения теории несимметричной упругости// Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. Вып. 6. С. 1117-1120.
8. Кулеш М. А., Матвеенко В. П., Шардаков И.Н. О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера// Акустический журнал. 2006. Т.52. № 2. С. 227-235.
9. *Ерофеев В. И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во МГУ. 1999. 328с.
10. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жесткостных характеристик// Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т.53. Вып. 2. С. 148-156.
11. Саркисян А. А. Асимптотический анализ начально-граничной динамической задачи несимметричной теории упругости со свободным вращением в тонкой области оболочки// Известия НАН Армении. Механика. 2011. Т. 64. № 2. С. 39-50.
12. Перцев А. К., Платонов Э. Г. Динамика оболочек и пластин (нестационарные задачи). Ленинград: "Судостроение". 1987. 316 с.
13. Пелех, Б.Л. 1973. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Изд.-во "Наукова думка". 1973. 248с.
14. Саркисян С.О., Саркисян А.А. Свободные колебания микрополярных пластин// Труды VII Всероссийской научной конференции "Нелинейные колебания механических систем". Нижний Новгород: Изд. Дом "Диалог Культур". 2008. С. 415-423.
15. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука. 1984. 228 с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Саркисян Арменуи Акоповна *- кандидат физ.- мат. наук, асистент каф. мат. анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна.*
E-mail: armenuhis@mail.ru, armenuhis@gmail.com

Поступило в редакцию 17.05.2012