ԳՅՈՒՄՐՈՒ Մ. ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՄԱՆԿԱՎԱՐԺԱԿԱՆ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ГЮМРИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. М. НАЛБАНДЯНА
GYUMRI STATE PEDAGOGICAL INSTITUTE AFTER M. NALBANDYAN
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ SCIENTIFIC PROCEEDINGS

Պրակ Ա
Выпуск А
Issue A

2013

№ 1

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 539.3

С.О.Саркисян

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Բանալի բառեր՝ ասիմպտոտիկ մեթոդ, մոդել, կառուցում, միկրոպոլյար, առաձգական, բարակ, սալ, վարկածների մեթոդ, հիմնավորում:

Ключевые слова: асимптотический метод, построение, модель, микро-полярный, упругий, тонкий, пластинка, обоснование, метод гипотез.

Keywords: asymptotic method, construction, model, micropolar, elastic, thin, plate, justification, hypotheses method.

В работе на основе применения асимптотического метода для решения сингулярно-возмущенной с малым параметром системы дифференциальных уравнений в частных производных, построены математические модели как для изгибной деформации, так и для обобщенного плоского напряженного состояния микрополярных упругих тонких пластин. Дается математическое обоснование для аналогичных теорий построенных на основе метода гипотез.

Введение. Асимптотические методы получают в последнее время все более широкое и разнообразное применение в математической физике. Особенно естественным является использование этого подхода в построении теорий пластин и оболочек, так как последние представляют собой тонкое деформируемое тело и малый параметр (относительная толщина) естественным образом входит в определение самого обьекта исследований. Теория пластин и оболочек-это наука асимптотическая[1-3].

Задача о построении асимптотическим методом математических моделей пластин и оболочек в классической теории упругости поставлена в работах Friedrichs K.O. [4,5], Green A.E. [6] и основательным образом это направление было развито в работах И.И. Воровича[1] и А.Л. Гольденвейзера [2], их учеников и коллег: А. А. Агаловяна [3], Ю.Л. Каплунова, Л.Ю. Коссовича и Е.В. Нольде [7], Н.Н. Рогачевой [8], С.О. Саркисяна [9], Ю.А. Устинова [10] и др.

В данной работе развит асимптотический метод решения [11] граничной задачи микрополярной (несимметричной, моментной) теории упругости в тонкой области пластинки, построены асимптотически точные теории (изгиба и обобщенного плоского напряженного состояния) микрополярных упругих тонких пластин и обоснованы соответствующие математические модели микрополярных пластин, построенные в работе [12] на основе метода гипотез.

Отметим, что построение математических моделей микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек методом гипотез осуществлено в работах [12-16].

1.Постановка задачи. Рассмотрим изотропную пластинку постоянной толщины $2h$ как трехмерное упругое микрополярное тело. Введем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, совмещая плоскость Ox_1x_2 со срединной плоскостью пластины. Будем исходить из основных уравнений пространственной статической задачи линейной несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [17, 18]:

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{1i}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{2i}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{3i}}{\partial x_3}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}=0,$$
$$\frac{\partial\mu_{1i}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{2i}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{3i}}{\partial x_3}+(-1)^j\left(\sigma_{j3}-\sigma_{3j}\right)=0,\quad \frac{\partial\mu_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{33}}{\partial x_3}+\sigma_{12}-\sigma_{21}=0. \tag{1.1}$$

Физические соотношения

$$\gamma_{ii}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{ii}-\nu\left(\sigma_{jj}+\sigma_{33}\right)\right],\ \gamma_{33}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{33}-\nu\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)\right],$$
$$\gamma_{ij}=\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{ij}-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{ji},\ \gamma_{i3}=\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{i3}-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{3i},$$
$$\gamma_{3i}=\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{3i}-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{i3},\ \chi_{ii}=\frac{\beta+\gamma}{\gamma(3\beta+2\gamma)}\left[\mu_{ii}-\frac{\beta}{2(\beta+\gamma)}\left(\mu_{jj}+\mu_{33}\right)\right], \tag{1.2}$$
$$\chi_{33}=\frac{\beta+\gamma}{\gamma(3\beta+2\gamma)}\left[\mu_{33}-\frac{\beta}{2(\beta+\gamma)}\left(\mu_{11}+\mu_{22}\right)\right],\ \chi_{ji}=\frac{1}{4\gamma\varepsilon}\left[(\gamma+\varepsilon)\mu_{ji}-(\gamma-\varepsilon)\mu_{ij}\right],$$
$$\chi_{i3}=\frac{1}{4\gamma\varepsilon}\left[(\gamma+\varepsilon)\mu_{i3}-(\gamma-\varepsilon)\mu_{3i}\right],\ \chi_{3i}=\frac{1}{4\gamma\varepsilon}\left[(\gamma+\varepsilon)\mu_{3i}-(\gamma-\varepsilon)\mu_{i3}\right].$$

Геометрические соотношения

$$\gamma_{ii}=\frac{\partial V_i}{\partial x_i},\ \gamma_{33}=\frac{\partial V_3}{\partial x_3},\ \gamma_{ij}=\frac{\partial V_j}{\partial x_i}-(-1)^j\omega_3,$$
$$\gamma_{i3}=\frac{\partial V_3}{\partial x_i}+(-1)^j\omega_j,\ \gamma_{3i}=\frac{\partial V_i}{\partial x_3}-(-1)^j\omega_j,\ \chi_{ii}=\frac{\partial\omega_i}{\partial x_i}, \tag{1.3}$$
$$\chi_{33}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_3},\ \chi_{ji}=\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j},\ \chi_{i3}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_i},\ \chi_{3i}=\frac{\partial\omega_i}{\partial x_3}.$$

Здесь $\sigma_{ii},\sigma_{ij},\sigma_{i3},\sigma_{3i},\sigma_{33},\mu_{ii},\mu_{ij},\mu_{i3},\mu_{3i},\mu_{33}$, -компоненты силового и моментного тензоров напряжений; V_i, V_3 -компоненты вектора перемещения, ω_i,ω_3 -компоненты вектора независимого поворота точек пластинки; $E, \nu, \mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$, $\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon$ -упругие постоянные материала пластинки; здесь и в дальнейшем $i=1,2;\ j=1,2; i\neq j$.

На лицевых плоскостях пластинки $x_3 = \pm h$ считаются заданными силовые и моментные напряжения:

$$\sigma_{3i} = \pm p_i^{\pm}, \quad \sigma_{33} = \pm p_3^{\pm},\ \mu_{3i} = \pm m_i^{\pm}, \quad \mu_{33} = \pm m_3^{\pm}, \tag{1.4}$$

где $p_i^{\pm}, p_3^{\pm}, m_i^{\pm}, m_3^{\pm}$ - компоненты внешних заданных усилий и моментов.

Граничные условия на боковой поверхности пластинки Σ, в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления ее точек, записываются в силовых и моментных напряжениях, перемещениях и поворотах или в смешанном виде. Рассмотрим следующие три основные типы граничных условий трехмерной несимметричной теории упругости: 1) когда заданы силовые и моментные напряжения, 2) когда точки поверхности Σ закреплены, 3) когда заданы трехмерные смешанные условия (вид которых будет конкретизирован ниже).

Отметим, что решение краевой задачи (1.1)-(1.4) складывается из сумммы решений симметричной и обратно симметричной по x_3 задач. В симметричной задаче $\sigma_{ii},\sigma_{33},\ \sigma_{ij},\mu_{3i},\mu_{i3},V_i,\omega_3$ -четные по x_3 функции, а $\sigma_{i3},\sigma_{3i},\mu_{ii},\mu_{33},\mu_{ij}$, V_3, ω_i -нечетные; в обратно-симметричной задаче- наоборот.

Общие граничные условия (1.4) на лицевых плоскостях пластинки $x_3 = \pm h$ для указанных обратно-симметричной и симметричной по x_3 задач распадаются на следующие две группы:

для обратно-симметричной по x_3 задачи

$$\sigma_{3i} = \frac{p_i^+ - p_i^-}{2},\ \ \sigma_{33} = \pm\frac{p_3^+ + p_3^-}{2}, \quad \mu_{3i} = \pm\frac{m_i^+ + m_i^-}{2}, \quad \mu_{33} = \frac{m_3^+ - m_3^-}{2} \tag{1.5}$$

для симметричной по x_3 задачи

$$\sigma_{3i} = \pm\frac{p_i^+ + p_i^-}{2},\ \ \sigma_{33} = \frac{p_3^+ - p_3^-}{2}, \quad \mu_{3i} = \frac{m_i^+ - m_i^-}{2}, \quad \mu_{33} = \pm\frac{m_3^+ + m_3^-}{2}. \tag{1.6}$$

Будем предполагать, что толщина пластинки $2h$ мала по сравнению с длиной волны деформации a в плане, т. е. $2h<<a,\ \delta = h/a<<1$; δ -основной малый геометрический параметр задачи.

В основу рассуждений кладем свойство напряженно-деформированного состояния (НДС) тонкой пластинки, выражаемое структурной формулой

$$\left(НДС\right)_{полн} = \left(НДС\right)_{вн} + \left(НДС\right)_{кр}. \tag{1.7}$$

Здесь под $\left(НДС\right)_{полн}, \left(НДС\right)_{вн}$ и $\left(НДС\right)_{кр}$ подразумевается полное, внутреннее (охватывающего пластину в целом) и краевое (локализованное вблизи боковой поверхности пластинки) НДС. При таком подходе на результатах исходного приближения внутренней задачи возможно будет построение общей прикладной двумерной теории микрополярных тонких пластин.

При определении внутреннего и краевого НДС в пластинке большую роль играют значения физических констант микрополярного материала пластинки. С этой точки зрения введем следующие безразмерные физические параметры:

$$\frac{\mu}{\alpha}, \frac{a^2\mu}{\beta}, \frac{a^2\mu}{\gamma}, \frac{a^2\mu}{\varepsilon}. \tag{1.8}$$

2. Построение внутреннего итерационного процесса. В уравнениях (1.1)-(1.3) пространственной задачи микрополярной теории упругости перейдем к безразмерной системе координат и безразмерным величинам по формулам:

$$\frac{x_1}{a} = \xi, \quad \frac{x_2}{a} = \eta, \quad \frac{x_3}{h} = \zeta, \tag{2.1}$$

$$\frac{\sigma_{mn}}{\mu} = \overline{\sigma}_{mn}, \quad \frac{\mu_{mn}}{a\mu} = \overline{\mu}_{mn}, \quad \frac{V_i}{a} = \overline{V}_i, \quad m,n = 1,2,3. \tag{2.2}$$

Будем использовать также введенные выше безразмерные физические параметры (1.8).

В итоге получим сингулярно-возмущенную с малым геометрическим параметром δ краевую задачу, решение которой складывается из суммы решений внутренней задачи и погранслойных задач.

Решение внутренней задачи представим в виде асимптотического разложения

$$Q = \delta^{-q} \sum_{s=0}^{S} \delta^s Q^{(s)}, \tag{2.3}$$

где Q -любое из напряжений (силовых или моментных), перемещений и поворотов; q -натуральное число, которое различно для различных величин и которое определяется из условия получения непротиворечивой рекуррентной системы уравнений в асимптотических приближениях.

Для безразмерных физических параметров (1.8) примем значения:

$$\frac{\mu}{\alpha} \sim 1, \quad \frac{a^2\mu}{\beta} \sim 1, \quad \frac{a^2\mu}{\gamma} \sim 1, \quad \frac{a^2\mu}{\varepsilon} \sim 1. \tag{2.4}$$

Таким образом в выражениях (2.3) для q получим:

1) для обратно-симметричной по x_3 задачи (для задачи изгиба):

$$\begin{aligned} &q = 1 \ \text{ для } \ \overline{\sigma}_{i3}, \overline{\sigma}_{3i}, \overline{\mu}_{ii}, \overline{\mu}_{ij}, \overline{\mu}_{33}, \overline{V}_3, \omega_i, \\ &q = 0 \ \text{ для } \ \overline{\sigma}_{ii}, \overline{\sigma}_{ij}, \overline{\sigma}_{33}, \overline{\mu}_{i3}, \overline{\mu}_{3i}, \overline{V}_i, \omega_3. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Уравнения в асимптотических приближениях будут выражаться так:

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-2)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{21}^{(s-2)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{31}^{(s)}}{\partial\zeta}=0,\ \frac{\partial\sigma_{12}^{(s-2)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22}^{(s-2)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{32}^{(s)}}{\partial\zeta}=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{13}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{23}^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{33}^{(s)}}{\partial\zeta}=0,\ \frac{\partial\mu_{11}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\mu_{21}^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\mu_{31}^{(s)}}{\partial\zeta}+\sigma_{23}^{(s)}-\sigma_{32}^{(s)}=0, \qquad (2.6)$$

$$\frac{\partial\mu_{12}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\mu_{22}^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\mu_{32}^{(s)}}{\partial\zeta}+\sigma_{31}^{(s)}-\sigma_{13}^{(s)}=0,$$

$$\frac{\partial\mu_{13}^{(s-2)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\mu_{23}^{(s-2)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\mu_{33}^{(s)}}{\partial\zeta}+\sigma_{12}^{(s-2)}-\sigma_{21}^{(s-2)}=0.$$

Физико-геометрические соотношения

$$\frac{\partial u_1^{(s)}}{\partial\xi}=\frac{1}{2(1+\nu)}\left[\sigma_{11}^{(s)}-\nu\sigma_{22}^{(s)}-\nu\sigma_{33}^{(s)}\right],\ \frac{\partial u_2^{(s)}}{\partial\eta}=\frac{1}{2(1+\nu)}\left[\sigma_{22}^{(s)}-\nu\sigma_{11}^{(s)}-\nu\sigma_{33}^{(s)}\right],$$

$$\frac{\partial u_3^{(s)}}{\partial\zeta}=\frac{1}{2(1+\nu)}\left[\sigma_{33}^{(s-2)}-\nu\sigma_{11}^{(s-2)}-\nu\sigma_{22}^{(s-2)}\right],$$

$$\frac{\partial u_2^{(s)}}{\partial\xi}-\omega_3^{(s)}=\frac{\mu}{4\alpha}\left(\sigma_{12}^{(s)}-\sigma_{21}^{(s)}\right)+\frac{1}{4}\left(\sigma_{12}^{(s)}+\sigma_{21}^{(s)}\right),$$

$$\frac{\partial u_1^{(s)}}{\partial\eta}+\omega_3^{(s)}=\frac{\mu}{4\alpha}\left(\sigma_{21}^{(s)}-\sigma_{12}^{(s)}\right)+\frac{1}{4}\left(\sigma_{21}^{(s)}+\sigma_{12}^{(s)}\right),$$

$$\frac{\partial u_3^{(s)}}{\partial\xi}+\omega_2^{(s)}=\frac{\mu}{4\alpha}\left(\sigma_{13}^{(s)}-\sigma_{31}^{(s)}\right)+\frac{1}{4}\left(\sigma_{13}^{(s)}+\sigma_{31}^{(s)}\right),$$

$$\frac{\partial u_3^{(s)}}{\partial\eta}-\omega_1^{(s)}=\frac{\mu}{4\alpha}\left(\sigma_{23}^{(s)}-\sigma_{32}^{(s)}\right)+\frac{1}{4}\left(\sigma_{23}^{(s)}+\sigma_{32}^{(s)}\right),$$

$$\frac{\partial u_1^{(s)}}{\partial\zeta}-\omega_2^{(s)}=\frac{\mu}{4\alpha}\left(\sigma_{31}^{(s)}-\sigma_{13}^{(s)}\right)+\frac{1}{4}\left(\sigma_{31}^{(s)}+\sigma_{13}^{(s)}\right),$$

$$\frac{\partial u_2^{(s)}}{\partial\zeta}+\omega_1^{(s)}=\frac{\mu}{4\alpha}\left(\sigma_{32}^{(s)}-\sigma_{23}^{(s)}\right)+\frac{1}{4}\left(\sigma_{32}^{(s)}+\sigma_{23}^{(s)}\right), \qquad (2.7)$$

$$\frac{\partial\omega_1^{(s)}}{\partial\xi}=\frac{a^2\mu}{\gamma}\left[\frac{\beta+\gamma}{3\beta+2\gamma}\mu_{11}^{(s)}-\frac{\beta}{2(3\beta+2\gamma)}\mu_{22}^{(s)}-\frac{\beta}{2(3\beta+2\gamma)}\mu_{33}^{(s)}\right],$$

$$\frac{\partial\omega_2^{(s)}}{\partial\eta}=\frac{a^2\mu}{\gamma}\left[\frac{\beta+\gamma}{3\beta+2\gamma}\mu_{22}^{(s)}-\frac{\beta}{2(3\beta+2\gamma)}\mu_{11}^{(s)}-\frac{\beta}{2(3\beta+2\gamma)}\mu_{33}^{(s)}\right],$$

$$\frac{\partial\omega_3^{(s)}}{\partial\zeta}=\frac{a^2\mu}{\gamma}\left[\frac{\beta+\gamma}{3\beta+2\gamma}\mu_{33}^{(s)}-\frac{\beta}{2(3\beta+2\gamma)}\mu_{11}^{(s)}-\frac{\beta}{2(3\beta+2\gamma)}\mu_{22}^{(s)}\right],$$

$$\frac{\partial\omega_2^{(s)}}{\partial\xi}=\frac{a^2\mu}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{12}^{(s)}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{21}^{(s)}\right],$$

$$\frac{\partial\omega_1^{(s)}}{\partial\eta}=\frac{a^2\mu}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{21}^{(s)}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{12}^{(s)}\right],$$
$$\frac{\partial\omega_3^{(s)}}{\partial\xi}=\frac{a^2\mu}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{13}^{(s)}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{31}^{(s)}\right],$$
$$\frac{\partial\omega_3^{(s)}}{\partial\eta}=\frac{a^2\mu}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{23}^{(s)}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{32}^{(s)}\right],$$
$$\frac{\partial\omega_1^{(s)}}{\partial\zeta}=\frac{a^2\mu}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{31}^{(s-2)}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{13}^{(s-2)}\right],$$
$$\frac{\partial\omega_2^{(s)}}{\partial\zeta}=\frac{a^2\mu}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{32}^{(s-2)}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{23}^{(s-2)}\right].$$

2) для симметричной по x_3 задачи (плоское напряженное состояние):

$$\begin{aligned}
&q=2 \quad \text{для} \quad \overline{\sigma}_{ii},\overline{\sigma}_{ij},\overline{\mu}_{i3},\overline{\mu}_{3i},\overline{V}_i,\omega_3,\\
&q=1 \quad \text{для} \quad \overline{\sigma}_{i3},\overline{\sigma}_{3i},\overline{\mu}_{ii},\overline{\mu}_{ij},\overline{\mu}_{33},\overline{V}_3,\omega_i,\\
&q=0 \quad \text{для} \quad \overline{\sigma}_{33}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Уравнения в асимптотических приближениях будут выражаться так:

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{11}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{21}^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{31}^{(s)}}{\partial\zeta}=0,\ \frac{\partial\sigma_{12}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22}^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{32}^{(s)}}{\partial\zeta}=0,\\
&\frac{\partial\sigma_{13}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{23}^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{33}^{(s)}}{\partial\zeta}=0,\ \frac{\partial\mu_{11}^{(s-2)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\mu_{21}^{(s-2)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\mu_{31}^{(s)}}{\partial\zeta}+\sigma_{23}^{(s-2)}-\sigma_{32}^{(s-2)}=0,\\
&\frac{\partial\mu_{12}^{(s-2)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\mu_{22}^{(s-2)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\mu_{32}^{(s)}}{\partial\zeta}+\sigma_{31}^{(s-2)}-\sigma_{13}^{(s-2)}=0,\\
&\frac{\partial\mu_{13}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\mu_{23}^{(s)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\mu_{33}^{(s)}}{\partial\zeta}+\sigma_{12}^{(s)}-\sigma_{21}^{(s)}=0.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Физико-геометрические соотношения

$$\frac{\partial u_1^{(s)}}{\partial\xi}=\frac{1}{2(1+\nu)}\left[\sigma_{11}^{(s)}-\nu\sigma_{22}^{(s)}-\nu\sigma_{33}^{(s-2)}\right],\ \frac{\partial u_2^{(s)}}{\partial\eta}=\frac{1}{2(1+\nu)}\left[\sigma_{22}^{(s)}-\nu\sigma_{11}^{(s)}-\nu\sigma_{33}^{(s-2)}\right],$$
$$\frac{\partial u_3^{(s)}}{\partial\zeta}=\frac{1}{2(1+\nu)}\left[\sigma_{33}^{(s-2)}-\nu\left(\sigma_{11}^{(s)}+\sigma_{22}^{(s)}\right)\right],\ \frac{\partial u_2^{(s)}}{\partial\xi}-\omega_3^{(s)}=\frac{\mu+\alpha}{4\alpha}\sigma_{12}^{(s)}-\frac{\mu-\alpha}{4\alpha}\sigma_{21}^{(s)},$$
$$\frac{\partial u_1^{(s)}}{\partial\eta}+\omega_3^{(s)}=\frac{\mu+\alpha}{4\alpha}\sigma_{21}^{(s)}-\frac{\mu-\alpha}{4\alpha}\sigma_{12}^{(s)},\ \frac{\partial u_3^{(s)}}{\partial\xi}+\omega_2^{(s)}=\frac{\mu+\alpha}{4\alpha}\sigma_{13}^{(s)}-\frac{\mu-\alpha}{4\alpha}\sigma_{31}^{(s)},$$
$$\frac{\partial u_3^{(s)}}{\partial\eta}-\omega_1^{(s)}=\frac{\mu+\alpha}{4\alpha}\sigma_{23}^{(s)}-\frac{\mu-\alpha}{4\alpha}\sigma_{32}^{(s)},\ \frac{\partial u_1^{(s)}}{\partial\zeta}-\omega_2^{(s-2)}=\frac{\mu+\alpha}{4\alpha}\sigma_{31}^{(s-2)}-\frac{\mu-\alpha}{4\alpha}\sigma_{13}^{(s-2)},$$

$$\frac{\partial u_2^{(s)}}{\partial \zeta}+\omega_1^{(s-2)}=\frac{\mu+\alpha}{4\alpha}\sigma_{32}^{(s-2)}-\frac{\mu-\alpha}{4\alpha}\sigma_{23}^{(s-2)},$$
$$\frac{\partial \omega_1^{(s)}}{\partial \xi}=\frac{a^2\mu}{\gamma}\left[\frac{\beta+\gamma}{3\beta+2\gamma}\mu_{11}^{(s)}-\frac{\beta}{2(3\beta+2\gamma)}\mu_{22}^{(s)}-\frac{\beta}{2(3\beta+2\gamma)}\mu_{33}^{(s)}\right],$$
$$\frac{\partial \omega_2^{(s)}}{\partial \eta}=\frac{a^2\mu}{\gamma}\left[\frac{\beta+\gamma}{3\beta+2\gamma}\mu_{22}^{(s)}-\frac{\beta}{2(3\beta+2\gamma)}\mu_{11}^{(s)}-\frac{\beta}{2(3\beta+2\gamma)}\mu_{33}^{(s)}\right], \qquad (2.10)$$
$$\frac{\partial \omega_3^{(s)}}{\partial \zeta}=\frac{a^2\mu}{\gamma}\left[\frac{\beta+\gamma}{3\beta+2\gamma}\mu_{33}^{(s-2)}-\frac{\beta}{2(3\beta+2\gamma)}\mu_{11}^{(s-2)}-\frac{\beta}{2(3\beta+2\gamma)}\mu_{22}^{(s-2)}\right],$$
$$\frac{\partial \omega_2^{(s)}}{\partial \xi}=\frac{a^2\mu}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{12}^{(s)}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{21}^{(s)}\right],\ \frac{\partial \omega_1^{(s)}}{\partial \eta}=\frac{a^2\mu}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{21}^{(s)}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{12}^{(s)}\right],$$
$$\frac{\partial \omega_3^{(s)}}{\partial \xi}=\frac{a^2\mu}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{13}^{(s)}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{31}^{(s)}\right],\ \frac{\partial \omega_3^{(s)}}{\partial \eta}=\frac{a^2\mu}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{23}^{(s)}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{32}^{(s)}\right],$$
$$\frac{\partial \omega_1^{(s)}}{\partial \zeta}=\frac{a^2\mu}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{31}^{(s)}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{13}^{(s)}\right],\ \frac{\partial \omega_2^{(s)}}{\partial \zeta}=\frac{a^2\mu}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{32}^{(s)}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{23}^{(s)}\right].$$

3. Основные уравнения изгибной деформации микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений. Рассмотрим уравнения (2.6), (2.7) для обратно-симметричной по x_3 задачи. В исходном асимптотическом приближении $s=0$, будем иметь:

$$\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial \zeta}=0,\ \frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial \zeta}=0,\ \frac{\partial \omega_2^{(0)}}{\partial \zeta}=0, \qquad (3.1)$$
$$\frac{\partial \sigma_{31}^{(0)}}{\partial \zeta}=0,\ \frac{\partial \sigma_{32}^{(0)}}{\partial \zeta}=0,\ \frac{\partial \mu_{33}^{(0)}}{\partial \zeta}=0, \qquad (3.2)$$
$$\frac{\partial \sigma_{12}^{(0)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \sigma_{23}^{(0)}}{\partial \eta}+\frac{\partial \sigma_{33}^{(0)}}{\partial \zeta}=0, \qquad (3.3)$$
$$\frac{\partial \mu_{11}^{(0)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \mu_{21}^{(0)}}{\partial \eta}+\frac{\partial \mu_{31}^{(0)}}{\partial \zeta}+\sigma_{23}^{(0)}-\sigma_{32}^{(0)}=0,$$
$$\frac{\partial \mu_{12}^{(0)}}{\partial \xi}+\frac{\partial \mu_{22}^{(0)}}{\partial \eta}+\frac{\partial \mu_{32}^{(0)}}{\partial \zeta}+\sigma_{31}^{(0)}-\sigma_{13}^{(0)}=0, \qquad (3.4)$$
$$\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial \xi}=\frac{1}{2(1+\nu)}\left[\sigma_{11}^{(0)}-\nu\sigma_{22}^{(0)}-\nu\sigma_{33}^{(0)}\right],$$
$$\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial \eta}=\frac{1}{2(1+\nu)}\left[\sigma_{22}^{(0)}-\nu\sigma_{11}^{(0)}-\nu\sigma_{33}^{(0)}\right], \qquad (3.5)$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial \xi} - \omega_3^{(0)} = \frac{\mu+\alpha}{4\alpha}\sigma_{12}^{(0)} - \frac{\mu-\alpha}{4\alpha}\sigma_{21}^{(0)},\\ \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial \eta} + \omega_3^{(0)} = \frac{\mu+\alpha}{4\alpha}\sigma_{21}^{(0)} - \frac{\mu-\alpha}{4\alpha}\sigma_{12}^{(0)},\end{gathered}\tag{3.6}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial \xi} + \omega_2^{(0)} = \frac{\mu+\alpha}{4\alpha}\sigma_{13}^{(0)} - \frac{\mu-\alpha}{4\alpha}\sigma_{31}^{(0)},\\ \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial \eta} - \omega_1^{(0)} = \frac{\mu+\alpha}{4\alpha}\sigma_{23}^{(0)} - \frac{\mu-\alpha}{4\alpha}\sigma_{32}^{(0)},\end{gathered}\tag{3.7}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial \zeta} - \omega_2^{(0)} = \frac{\mu+\alpha}{4\alpha}\sigma_{31}^{(0)} - \frac{\mu-\alpha}{4\alpha}\sigma_{13}^{(0)},\\ \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial \zeta} + \omega_1^{(0)} = \frac{\mu+\alpha}{4\alpha}\sigma_{32}^{(0)} - \frac{\mu-\alpha}{4\alpha}\sigma_{23}^{(0)},\end{gathered}\tag{3.8}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial \xi} = \frac{a^2\mu}{\gamma}\left[\frac{\beta+\gamma}{3\beta+2\gamma}\mu_{11}^{(0)} - \frac{\beta}{2(3\beta+2\gamma)}\mu_{22}^{(0)} - \frac{\beta}{2(3\beta+2\gamma)}\mu_{33}^{(0)}\right],\\ \frac{\partial \omega_2^{(0)}}{\partial \eta} = \frac{a^2\mu}{\gamma}\left[\frac{\beta+\gamma}{3\beta+2\gamma}\mu_{22}^{(0)} - \frac{\beta}{2(3\beta+2\gamma)}\mu_{11}^{(0)} - \frac{\beta}{2(3\beta+2\gamma)}\mu_{33}^{(0)}\right],\\ \frac{\partial \omega_3^{(0)}}{\partial \zeta} = \frac{a^2\mu}{\gamma}\left[\frac{\beta+\gamma}{3\beta+2\gamma}\mu_{33}^{(0)} - \frac{\beta}{2(3\beta+2\gamma)}\mu_{11}^{(0)} - \frac{\beta}{2(3\beta+2\gamma)}\mu_{22}^{(0)}\right],\end{gathered}\tag{3.9}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial \omega_2^{(0)}}{\partial \xi} = \frac{a^2\mu}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{12}^{(0)} - \frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{21}^{(0)}\right],\\ \frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial \eta} = \frac{a^2\mu}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{21}^{(0)} - \frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{12}^{(0)}\right],\end{gathered}\tag{3.10}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial \omega_3^{(0)}}{\partial \xi} = \frac{a^2\mu}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{13}^{(0)} - \frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{31}^{(0)}\right],\\ \frac{\partial \omega_3^{(0)}}{\partial \eta} = \frac{a^2\mu}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{23}^{(0)} - \frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{32}^{(0)}\right].\end{gathered}\tag{3.11}$$

На основании формул (3.1), (3.2), (3.8), (3.9) получим:

$$u_3^{(0)} = \overset{0}{u}{}_3^{(0)}(\xi,\eta), \qquad \omega_1^{(0)} = \overset{0}{\omega}{}_1^{(0)}(\xi,\eta), \qquad \omega_2^{(0)} = \overset{0}{\omega}{}_2^{(0)}(\xi,\eta),\tag{3.12}$$

$$u_1^{(0)} = \zeta\psi_1^{(0)}(\xi,\eta), \qquad u_2^{(0)} = \zeta\psi_2^{(0)}(\xi,\eta), \qquad \omega_3^{(0)} = \zeta\iota^{(0)}(\xi,\eta),\tag{3.13}$$

$$\sigma_{31}^{(0)} = \overset{0}{\sigma}{}_{31}^{(0)}(\xi,\eta), \qquad \sigma_{32}^{(0)} = \overset{0}{\sigma}{}_{32}^{(0)}(\xi,\eta), \qquad \mu_{33}^{(0)} = \overset{0}{\mu}{}_{33}^{(0)}(\xi,\eta),\tag{3.14}$$

Далее принимая во внимание результат (3.12)-(3.14), для силовых и моментных напряжений при помщи равенств (3.5)-(3.11), а также, с учетом граничных условий из (1.5) для σ_{33} и μ_{3i}, будем иметь

$$\sigma_{13}^{(0)} = \overset{0}{\sigma}{}_{13}^{(0)}(\xi,\eta) = \frac{\mu+\alpha}{\mu}\left(\frac{\partial \overset{0}{u}{}_3^{(0)}}{\partial \xi} + \overset{0}{\omega}{}_2^{(0)}\right) + \frac{\mu-\alpha}{\mu}\left(\psi_1^{(0)} - \overset{0}{\omega}{}_2^{(0)}\right),$$
$$\sigma_{23}^{(0)} = \overset{0}{\sigma}{}_{23}^{(0)}(\xi,\eta) = \frac{\mu+\alpha}{\mu}\left(\frac{\partial \overset{0}{u}{}_3^{(0)}}{\partial \eta} - \overset{0}{\omega}{}_1^{(0)}\right) + \frac{\mu-\alpha}{\mu}\left(\psi_2^{(0)} + \overset{0}{\omega}{}_1^{(0)}\right), \tag{3.15}$$

$$\overset{0}{\sigma}{}_{31}^{(0)} = \frac{\mu+\alpha}{\mu}\left(\psi_1^{(0)} - \overset{0}{\omega}{}_2^{(0)}\right) + \frac{\mu-\alpha}{\mu}\left(\frac{\partial \overset{0}{u}{}_3^{(0)}}{\partial \xi} + \overset{0}{\omega}{}_2^{(0)}\right),$$
$$\overset{0}{\sigma}{}_{32}^{(0)} = \frac{\mu+\alpha}{\mu}\left(\psi_2^{(0)} + \overset{0}{\omega}{}_1^{(0)}\right) + \frac{\mu-\alpha}{\mu}\left(\frac{\partial \overset{0}{u}{}_3^{(0)}}{\partial \eta} - \overset{0}{\omega}{}_1^{(0)}\right), \tag{3.16}$$

$$\sigma_{33}^{(0)} = -\zeta\left(\frac{\partial \overset{0}{\sigma}{}_{13}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \overset{0}{\sigma}{}_{23}^{(0)}}{\partial \eta}\right) = \zeta\,\frac{p_3^+ + p_3^-}{2\mu}, \tag{3.17}$$

$$\sigma_{11}^{(0)} = \zeta\,\overset{1}{\sigma}{}_{11}^{(0)}(\xi,\eta), \quad \sigma_{22}^{(0)} = \zeta\,\overset{1}{\sigma}{}_{22}^{(0)}(\xi,\eta),$$
$$\sigma_{12}^{(0)} = \zeta\,\overset{1}{\sigma}{}_{12}^{(0)}(\xi,\eta), \quad \sigma_{21}^{(0)} = \zeta\,\overset{1}{\sigma}{}_{21}^{(0)}(\xi,\eta), \tag{3.18}$$

$$\mu_{11}^{(0)} = \overset{0}{\mu}{}_{11}^{(0)}(\xi,\eta) = \frac{1}{\mu a^2}\left[(\beta+2\gamma)\frac{\partial \overset{0}{\omega}{}_1^{(0)}}{\partial \xi} + \beta\left(\frac{\partial \overset{0}{\omega}{}_2^{(0)}}{\partial \eta} + \iota^{(0)}\right)\right],$$
$$\mu_{22}^{(0)} = \overset{0}{\mu}{}_{22}^{(0)}(\xi,\eta) = \frac{1}{\mu a^2}\left[(\beta+2\gamma)\frac{\partial \overset{0}{\omega}{}_2^{(0)}}{\partial \eta} + \beta\left(\frac{\partial \overset{0}{\omega}{}_1^{(0)}}{\partial \xi} + \iota^{(0)}\right)\right], \tag{3.19}$$
$$\mu_{33}^{(0)} = \overset{0}{\mu}{}_{33}^{(0)}(\xi,\eta) = \frac{1}{\mu a^2}\left[(\beta+2\gamma)\iota^{(0)} + \beta\left(\frac{\partial \overset{0}{\omega}{}_1^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \overset{0}{\omega}{}_2^{(0)}}{\partial \eta}\right)\right],$$

$$\mu_{12}^{(0)} = \overset{0}{\mu}{}_{12}^{(0)}(\xi,\eta) = \frac{1}{\mu a^2}\left[(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial \overset{0}{\omega}{}_2^{(0)}}{\partial \xi} + (\gamma-\varepsilon)\frac{\partial \overset{0}{\omega}{}_1^{(0)}}{\partial \eta}\right], \tag{3.20}$$

$$\mu_{21}^{(0)} = \overset{0}{\mu}{}_{21}^{(0)}(\xi,\eta) = \frac{1}{\mu a^2}\left[(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial \overset{0}{\omega}{}_1^{(0)}}{\partial\eta} + (\gamma-\varepsilon)\frac{\partial \overset{0}{\omega}{}_2^{(0)}}{\partial\xi}\right],$$

$$\mu_{31}^{(0)} = -\zeta\left[\frac{\partial \overset{0}{\mu}{}_{11}^{(0)}}{\partial\xi} + \frac{\partial \overset{0}{\mu}{}_{21}^{(0)}}{\partial\eta} + \overset{0}{\sigma}{}_{23}^{(0)} - \overset{0}{\sigma}{}_{32}^{(0)}\right] = \zeta\,\frac{m_1^+ + m_1^-}{2\mu a},$$

$$\mu_{32}^{(0)} = -\zeta\left[\frac{\partial \overset{0}{\mu}{}_{12}^{(0)}}{\partial\xi} + \frac{\partial \overset{0}{\mu}{}_{22}^{(0)}}{\partial\eta} + \overset{0}{\sigma}{}_{31}^{(0)} - \overset{0}{\sigma}{}_{13}^{(0)}\right] = \zeta\,\frac{m_2^+ + m_2^-}{2\mu a}, \tag{3.21}$$

$$\mu_{13}^{(0)} = \zeta\,\overset{1}{\mu}{}_{13}^{(0)}(\xi,\eta),\ \mu_{23}^{(0)} = \zeta\,\overset{1}{\mu}{}_{23}^{(0)}(\xi,\eta), \tag{3.22}$$

где $\psi_1^{(0)},\psi_2^{(0)}$ и $\iota^{(0)}$ выражаются следующими формуламы:

$$\psi_1^{(0)} = \overset{0}{\omega}{}_2^{(0)} + \frac{\mu+\alpha}{4\alpha}\overset{0}{\sigma}{}_{31}^{(0)} - \frac{\mu-\alpha}{4\alpha}\overset{0}{\sigma}{}_{13}^{(0)},$$

$$\psi_2^{(0)} = -\overset{0}{\omega}{}_1^{(0)} + \frac{\mu+\alpha}{4\alpha}\overset{0}{\sigma}{}_{32}^{(0)} - \frac{\mu-\alpha}{4\alpha}\overset{0}{\sigma}{}_{23}^{(0)}, \tag{3.23}$$

$$\iota^{(0)} = \frac{a^2\mu}{\gamma}\left[\frac{\beta+\gamma}{3\beta+2\gamma}\overset{0}{\mu}{}_{33}^{(0)} - \frac{\beta}{2(3\beta+2\gamma)}\overset{0}{\mu}{}_{11}^{(0)} - \frac{\beta}{2(3\beta+2\gamma)}\overset{0}{\mu}{}_{22}^{(0)}\right], \tag{3.24}$$

а $\overset{1}{\sigma}{}_{11}^{(0)}, \overset{1}{\sigma}{}_{22}^{(0)}, \overset{1}{\sigma}{}_{12}^{(0)}, \overset{1}{\sigma}{}_{21}^{(0)}, \overset{1}{\mu}{}_{13}^{(0)}, \overset{1}{\mu}{}_{23}^{(0)}$ имеют следующие выражения:

$$\overset{1}{\sigma}{}_{11}^{(0)} = \frac{2}{1-\nu}\left(\frac{\partial\psi_1^{(0)}}{\partial\xi} + \nu\frac{\partial\psi_2^{(0)}}{\partial\eta}\right) + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{p_3^+ + p_3^-}{2\mu},$$

$$\overset{1}{\sigma}{}_{22}^{(0)} = \frac{2}{1-\nu}\left(\frac{\partial\psi_2^{(0)}}{\partial\eta} + \nu\frac{\partial\psi_1^{(0)}}{\partial\xi}\right) + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{p_3^+ + p_3^-}{2\mu}, \tag{3.25}$$

$$\overset{1}{\sigma}{}_{12}^{(0)} = \frac{\mu+\alpha}{\mu}\left(\frac{\partial\psi_2^{(0)}}{\partial\xi} - \iota^{(0)}\right) + \frac{\mu-\alpha}{\mu}\left(\frac{\partial\psi_1^{(0)}}{\partial\eta} + \iota^{(0)}\right),$$

$$\overset{1}{\sigma}{}_{21}^{(0)} = \frac{\mu+\alpha}{\mu}\left(\frac{\partial\psi_1^{(0)}}{\partial\eta} + \iota^{(0)}\right) + \frac{\mu-\alpha}{\mu}\left(\frac{\partial\psi_2^{(0)}}{\partial\xi} - \iota^{(0)}\right), \tag{3.26}$$

$$\overset{1}{\mu}{}_{13}^{(0)} = \frac{1}{\mu a^2}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\partial\iota^{(0)}}{\partial\xi} + \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_1^+ + m_1^-}{2\mu a},$$

$$\overset{1}{\mu}{}_{23}^{(0)} = \frac{1}{\mu a^2}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\partial\iota^{(0)}}{\partial\eta} + \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_2^+ + m_2^-}{2\mu a}. \tag{3.27}$$

Кроме выше приведенных имеют место также следующие равенства:

$$\frac{\partial \overset{0}{\sigma}{}^{(0)}_{13}}{\partial \xi}+\frac{\partial \overset{0}{\sigma}{}^{(0)}_{23}}{\partial \eta}=-\frac{p_3^{+}+p_3^{-}}{2\mu},$$

$$\frac{\partial \overset{0}{\mu}{}^{(0)}_{11}}{\partial \xi}+\frac{\partial \overset{0}{\mu}{}^{(0)}_{21}}{\partial \eta}+\overset{0}{\sigma}{}^{(0)}_{23}-\overset{0}{\sigma}{}^{(0)}_{32}=-\frac{m_1^{+}+m_1^{-}}{2\mu a}, \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial \overset{0}{\mu}{}^{(0)}_{12}}{\partial \xi}+\frac{\partial \overset{0}{\mu}{}^{(0)}_{22}}{\partial \eta}+\overset{0}{\sigma}{}^{(0)}_{31}-\overset{0}{\sigma}{}^{(0)}_{13}=-\frac{m_2^{+}+m_2^{-}}{2\mu a},$$

Асимптотические приближения внутреннего итерационного процесса (2.6), (2.7) с номером $s=1$ и, вообще, с нечетными индексами, будем принимать нулевыми.

Полученные формулы для исходных функций трехмерной задачи, т.е. для перемещений и свободных поворотов ((3.12),(3.13)), силовых и моментных напряжений ((3.14)-(3.22)), показывают явный вид их зависимости от координаты ζ. В итоге для описания внутреннего НДС остается выяснить роль переменных ξ и η, задающей положение точки на срединной плоскости пластинки. Поэтому, будем ввести статически эквивалентные силовым и моментным напряжениям усредненные по толщине пластинки характеристики: усилия N_{i3}, N_{3i}, моменты $M_{ii}, M_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, L_{33}$ и гипермоменты Λ_{i3}, по формулам:

$$N_{i3}=\int_{-h}^{h}\sigma_{i3}dx_3,\quad N_{3i}=\int_{-h}^{h}\sigma_{3i}dx_3,\quad M_{ii}=\int_{-h}^{h}\sigma_{ii}x_3dx_3,\quad M_{ij}=\int_{-h}^{h}\sigma_{ij}x_3dx_3,$$

$$L_{ii}=\int_{-h}^{h}\mu_{ii}dx_3,\quad L_{33}=\int_{-h}^{h}\mu_{33}dx_3,\quad L_{ij}=\int_{-h}^{h}\mu_{ij}dx_3,\quad \Lambda_{i3}=\int_{-h}^{h}\mu_{i3}x_3dx_3. \tag{3.29}$$

Задача состоит в получении асимптотических разложений для введенных усредненных величин: усилий, моментов и гипермоментов:

$$N_{3i}=N_{3i}^{(0)}+\delta^2\cdot N_{3i}^{(2)}+\ldots,\quad N_{i3}=N_{i3}^{(0)}+\delta^2\cdot N_{i3}^{(2)}+\ldots$$

$$M_{ii}=M_{ii}^{(0)}+\delta^2\cdot M_{ii}^{(2)}+\ldots,\quad M_{ii}=M_{ij}^{(0)}+\delta^2\cdot M_{ij}^{(2)}+\ldots$$

$$L_{ii}=L_{ii}^{(0)}+\delta^2\cdot L_{ii}^{(2)}+\ldots,\qquad L_{ij}=L_{ij}^{(0)}+\delta^2\cdot L_{ij}^{(2)}+\ldots$$

$$L_{33}=L_{33}^{(0)}+\delta^2\cdot L_{33}^{(2)}+\ldots,\qquad \Lambda_{i3}=\Lambda_{i3}^{(0)}+\delta^2\cdot \Lambda_{i3}^{(2)}+\ldots,$$

Наша основная цель- на уровне исходного приближения усредненных характеристик построить двумерную модель деформирования микрополярных пластин.

Остановимся сначала на вычислении асимптотических приближений для N_{3i} и L_{33}. Дело в том, что при вычислении указанных величин по формулам (3.29), для получения исходного приближения, к выражениям (3.14) возможно и, следовательно необходимо, добавить те части от второго приближения $\sigma_{3i}^{(2)}$ или $\mu_{33}^{(2)}$, для которых интегралы по толщине пластинки равны нулю, при этом будем использовать сугубо величины с верхним индексом s=0.

Сказанное можно выполнять следующим образом.

Рассмотрим нижеприведенные уравнения равновесия из второго приближения s=2 (на основе системы уравнений (2.6)):

$$\frac{\partial\sigma_{11}^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{21}^{(0)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial\sigma_{31}^{(2)}}{\partial\eta}=0,\qquad \frac{\partial\sigma_{12}^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22}^{(0)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{32}^{(2)}}{\partial\zeta}=0, \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial\mu_{13}^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\mu_{23}^{(0)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\mu_{33}^{(2)}}{\partial\zeta}+\sigma_{12}^{(0)}-\sigma_{21}^{(0)}=0, \tag{3.31}$$

где $\sigma_{11}^{(0)},\sigma_{22}^{(0)},\sigma_{12}^{(0)},\sigma_{21}^{(0)},\mu_{13}^{(0)},\mu_{23}^{(0)}$ выражаются формулами (3.18),(3.22).

Из уравнений (3.30),(3.31), после интегрирования поζ, для $\sigma_{31}^{(2)},\sigma_{32}^{(2)},\mu_{33}^{(2)}$ получим

$$\begin{aligned}
\sigma_{31}^{(2)}&=\overset{0}{\sigma}{}_{31}^{(2)}(\xi,\eta)-\frac{\zeta^2}{2}\left(\frac{\partial\overset{1}{\sigma}{}_{11}^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\overset{1}{\sigma}{}_{21}^{(0)}}{\partial\eta}\right),\\
\sigma_{32}^{(2)}&=\overset{0}{\sigma}{}_{32}^{(2)}(\xi,\eta)-\frac{\zeta^2}{2}\left(\frac{\partial\overset{1}{\sigma}{}_{12}^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\overset{1}{\sigma}{}_{22}^{(0)}}{\partial\eta}\right),
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\mu_{33}^{(2)}=\overset{0}{\mu}{}_{32}^{(2)}(\xi,\eta)-\frac{\zeta^2}{2}\left[\frac{\partial\overset{1}{\mu}{}_{13}^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\overset{1}{\mu}{}_{23}^{(0)}}{\partial\eta}+\left(\overset{1}{\sigma}{}_{12}^{(0)}-\overset{1}{\sigma}{}_{21}^{(0)}\right)\right]. \tag{3.33}$$

Из соотношений (3.32), (3.33) будем выделить определенные части, которые удовлетворяют требованиям:

$$\int_{-1}^{1}\sigma_{31}^{(2)}d\zeta=0,\quad \int_{-1}^{1}\sigma_{32}^{(2)}d\zeta=0,\quad \int_{-1}^{1}\mu_{33}^{(2)}d\zeta=0. \tag{3.34}$$

В итоге получим выражения:

$$\begin{aligned}
\sigma_{31}^{(2)}&=\left(\frac{1}{6}-\frac{\zeta^2}{2}\right)\left(\frac{\partial\overset{1}{\sigma}{}_{11}^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\overset{1}{\sigma}{}_{21}^{(0)}}{\partial\eta}\right),\\
\sigma_{32}^{(2)}&=\left(\frac{1}{6}-\frac{\zeta^2}{2}\right)\left(\frac{\partial\overset{1}{\sigma}{}_{12}^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\overset{1}{\sigma}{}_{22}^{(0)}}{\partial\eta}\right),
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\mu_{33}^{(2)} = \left(\frac{1}{6}-\frac{\zeta^2}{2}\right)\left[\frac{\partial \overset{1}{\mu}{}^{(0)}_{13}}{\partial \xi}+\frac{\partial \overset{1}{\mu}{}^{(0)}_{23}}{\partial \eta}+\left(\overset{1}{\sigma}{}^{(0)}_{12}-\overset{1}{\sigma}{}^{(0)}_{21}\right)\right]. \tag{3.36}$$

Для вычисления исходных приближений для N_{3i} и L_{33} (т.е. для $N_{3i}^{(0)}$ и L_{33}^{0}), будем складывать соответствующие выражения для выше указанных напряжений-(3.14),(3.35), (3.36) (имея в виду (2.3), (2.5)), тогда в размерном виде получим:

$$\begin{gathered}
\sigma_{31} = \mu\delta^{-1}\left[\overset{0}{\sigma}{}^{(0)}_{31}(\xi,\eta)+\delta^2\left(\frac{1}{6}-\frac{\zeta^2}{2}\right)\left(\frac{\partial \overset{1}{\sigma}{}^{(0)}_{11}}{\partial \xi}+\frac{\partial \overset{1}{\sigma}{}^{(0)}_{21}}{\partial \eta}\right)\right],\\
\sigma_{32} = \mu\delta^{-1}\left[\overset{0}{\sigma}{}^{(0)}_{32}(\xi,\eta)+\delta^2\left(\frac{1}{6}-\frac{\zeta^2}{2}\right)\left(\frac{\partial \overset{1}{\sigma}{}^{(0)}_{12}}{\partial \xi}+\frac{\partial \overset{1}{\sigma}{}^{(0)}_{22}}{\partial \eta}\right)\right],
\end{gathered} \tag{3.37}$$

$$\mu_{33} = \mu a\delta^{-1}\left\{\overset{0}{\mu}{}^{(0)}_{33}(\xi,\eta)+\delta^2\left(\frac{1}{6}-\frac{\zeta^2}{2}\right)\left[\frac{\partial \overset{1}{\mu}{}^{(0)}_{13}}{\partial \xi}+\frac{\partial \overset{1}{\mu}{}^{(0)}_{23}}{\partial \eta}+\left(\overset{1}{\sigma}{}^{(0)}_{12}-\overset{1}{\sigma}{}^{(0)}_{21}\right)\right]\right\}. \tag{3.38}$$

Окончательные формулы (3.37), (3.38) для σ_{3i} и μ_{33}, будем считать выражениями определяющие исходные приближения для усредненных величин N_{3i}, L_{33} (т.е. $N_{3i}^{(0)}$, L_{33}^{0}).

Теперь, при удовлетворении неоднородных граничных условий (1.5) для σ_{3i} и μ_{33}, будем использовать полные выражения (3.37), (3.38), которые, как сказано выше, определяют исходные приближения для N_{3i}, L_{33} (т.е. $N_{3i}^{(0)}$, L_{33}^{0}). Для вычисления следующего асимптотического приближения для N_{3i}, L_{33} (т.е. для вычисления величин $N_{3i}^{(2)}$, $L_{33}^{(2)}$), будем установить выражения для следующего приближения напряжений σ_{3i} и μ_{33}, для которых составим разности (3.32) и (3.35); (3.33) и (3.36), к которым, будем складывать такие соотношения из s=4, интегралы по толщине которых будут удовлетворять условиям типа (3.34), но на этот раз для приближения s=4. В результате, полученные выражения для следующего приближения функций σ_{3i}, μ_{33}, будут содержать величины исключительно с верхним индексом s=2. При помощи этих выражений будем удовлетворять граничные условия (1.5) для σ_{3i} и μ_{33}, но на этот раз (и в последующем) однородные (нулевые) граничные условия. Аналогичным образом будем построить последующие приближения для N_{3i} и L_{33}.

Таким образом построенный итерационный процесс приводит к последовательности двумерных задач. Главное в этом процессе является тот факт, что в исходном асимптотическом приближении двумерной задачи будут полностью учтены поперечные сдвиговые деформации.

Отметим, что представленный подход можно использовать также, когда имеем дело с классической теорий упругости. В результате будем получить итерационный процесс двухмерных задач, с получением в исходном приближении прикладной теории пластин, учитывающей поперечные сдвиговые деформации. Отметим, что специально построенный такой итерационный процесс можем трактовать как проявления исскуства асимптотики [19], в данном случае позволяющее построить прикладную теорию изгиба тонких пластин (классической или микрополярной), с учетом поперечных сдвиговых деформаций.

Теперь остановимся на задаче о полном построении исходного приближения для полученного итерационного процесса.

Для силовых напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} в указанном приближении имеем формулы (3.37), (3.38).

Остальные определяющие задачу величины этого приближения, которые выражаются через величины с верхним индексом s=0, также, представим в окончательном размерном виде:

$$w=\delta^{-1}a\overset{0}{u}{}_3^{(0)}(\xi,\eta),\ u_i=x_3\psi_i(x_1,x_2),\ \psi_i(x_1,x_2)=\delta^{-1}\psi_i^{(0)}(\xi,\eta),\ \Omega_i=\delta^{-1}\overset{0}{\omega}{}_i^{(0)}(\xi,\eta),$$

$$\omega_3=x_3\iota(x_1,x_2),\qquad \iota(x_1,x_2)=\frac{1}{h}\iota^{(0)},$$

$$\sigma_{ii}=x_3\mu\frac{1}{h}\overset{1}{\sigma}{}_{ii}^{(0)},\quad \sigma_{ij}=x_3\mu\frac{1}{h}\overset{1}{\sigma}{}_{ij}^{(0)},\quad \sigma_{33}=\mu\sigma_{33}^{(0)},$$

$$\sigma_{i3}=\mu\delta^{-1}\overset{0}{\sigma}{}_{i3}^{(0)},\quad \mu_{ii}=\mu a\delta^{-1}\overset{0}{\mu}{}_{ii}^{(0)},\quad \mu_{ij}=\mu a\delta^{-1}\overset{0}{\mu}{}_{ij}^{(0)},$$

$$\mu_{i3}=x_3\mu\delta^{-1}\overset{1}{\mu}{}_{i3}^{(0)},\quad \mu_{3i}=x_3\mu\delta^{-1}\overset{1}{\mu}{}_{3i}^{(0)}.$$

На основе формул (3.37), (3.38), удовлетворяя (как сказано выше) неоднородные граничные условия (1.5) для $\sigma_{31},\sigma_{32},\mu_{33}$, принимая ввиду уравнения (3.28), а также равенства для $\overset{0}{\sigma}{}_{13}^{(0)},\overset{0}{\sigma}{}_{23}^{(0)},\overset{0}{\sigma}{}_{31}^{(0)},\overset{0}{\sigma}{}_{32}^{(0)},\sigma_{11}^{(0)},\sigma_{22}^{(0)},\ \sigma_{12}^{(0)},\sigma_{21}^{(0)},\overset{0}{\mu}{}_{11}^{(0)},\overset{0}{\mu}{}_{22}^{(0)},\overset{0}{\mu}{}_{33}^{(0)},\overset{0}{\mu}{}_{12}^{(0)},\overset{0}{\mu}{}_{21}^{(0)},\mu_{13}^{(0)},\mu_{23}^{(0)}$, и выражения (3.29) для усредненных характеристик, получим основные уравнения прикладной двумерной теории микрополярных пластин с независимыми полями перемещений и вращений:

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{23}}{\partial x_2}=-\left(p_3^{+}+p_3^{-}\right),$$

$$N_{31}-\left(\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{21}}{\partial x_2}\right)=h\left(p_1^{+}-p_1^{-}\right), \qquad (3.39)$$

$$N_{32}-\left(\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2}\right)=h\left(p_2^{+}-p_2^{-}\right),$$

$$\frac{\partial L_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{21}}{\partial x_2}+N_{23}-N_{32}=-\left(m_1^{+}+m_1^{-}\right),$$

$$\frac{\partial L_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{22}}{\partial x_2}+N_{31}-N_{13}=-\left(m_2^{+}+m_2^{-}\right), \qquad (3.40)$$

$$L_{33}-\left[\frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2}+M_{12}-M_{21}\right]=-h\left(m_3^{+}-m_3^{-}\right).$$

Соотношения упругости

$$N_{13}=2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{13}+(\mu-\alpha)\Gamma_{31}\right],$$
$$N_{23}=2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{23}+(\mu-\alpha)\Gamma_{32}\right], \qquad (3.41)$$
$$N_{31}=2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{31}+(\mu-\alpha)\Gamma_{13}\right],$$
$$N_{32}=2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{32}+(\mu-\alpha)\Gamma_{23}\right],$$

$$M_{11}=\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left(K_{11}+\nu K_{22}\right)+\frac{h^2}{3}\frac{\nu}{1-\nu}\left(p_3^{+}+p_3^{-}\right),$$
$$(3.42)$$
$$M_{22}=\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left(K_{22}+\nu K_{11}\right)+\frac{h^2}{3}\frac{\nu}{1-\nu}\left(p_3^{+}+p_3^{-}\right),$$

$$M_{12}=\frac{2h^3}{3}\left[(\mu+\alpha)K_{12}+(\mu-\alpha)K_{21}\right],$$
$$(3.43)$$
$$M_{21}=\frac{2h^3}{3}\left[(\mu+\alpha)K_{21}+(\mu-\alpha)K_{12}\right],$$

$$L_{11}=2h\left[(\beta+2\gamma)\kappa_{11}+\beta\left(k_{22}+k_{33}\right)\right],$$
$$L_{22}=2h\left[(\beta+2\gamma)\kappa_{22}+\beta\left(k_{11}+k_{33}\right)\right], \qquad (3.44)$$
$$L_{33}=2h\left[(\beta+2\gamma)\kappa_{33}+\beta\left(k_{11}+k_{22}\right)\right],$$

$$L_{12}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)\kappa_{12}+(\gamma-\varepsilon)k_{21}\right],$$
$$(3.45)$$
$$L_{21}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)\kappa_{21}+(\gamma-\varepsilon)k_{12}\right],$$

$$\Lambda_{13}=\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{13}+\frac{h^2}{3}\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\left(m_1^{+}+m_1^{-}\right),$$
$$(3.46)$$
$$\Lambda_{23}=\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{23}+\frac{h^2}{3}\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\left(m_2^{+}+m_2^{-}\right),$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_2, \qquad \Gamma_{31} = \psi_1 - \Omega_2,$$
$$\Gamma_{23} = \frac{\partial w}{\partial x_2} - \Omega_1, \qquad \Gamma_{32} = \psi_2 + \Omega_1, \tag{3.47}$$

$$K_{11} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \qquad K_{22} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, \qquad K_{12} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \iota, \qquad K_{21} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \iota, \tag{3.48}$$

$$\kappa_{11} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}, \qquad \kappa_{22} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2}, \qquad k_{33} = \iota, \tag{3.49}$$

$$\kappa_{12} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}, \qquad \kappa_{21} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}, \tag{3.50}$$

$$l_{13} = \frac{\partial \iota}{\partial x_1}, \qquad l_{23} = \frac{\partial \iota}{\partial x_2}. \tag{3.51}$$

Следует отметить, что в уравнениях (3.39)-(3.46) для усредненных характеристик $N_{3i}, N_{i3}, M_{ii}, M_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, L_{33}, \Lambda_{ij}$, которые участвуют с верхним индеексом нуль (с индексом исходного приближения), этот индекс просто пропущен.

4. Основные уравнения обобщенного плоского напряженного состояния микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

Рассмотрим теперь уравнения (2.9), (2.10) для симметричной по x_3 задачи. В исходном асимптотическом приближении $s = 0$, будем иметь:

$$\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial \zeta} = 0, \ \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial \zeta} = 0, \ \frac{\partial \omega_3^{(0)}}{\partial \zeta} = 0, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial \xi} = \frac{1}{2(1+\nu)}\left(\sigma_{11}^{(0)} - \nu\sigma_{22}^{(0)}\right), \qquad \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial \eta} = \frac{1}{2(1+\nu)}\left(\sigma_{22}^{(0)} - \nu\sigma_{11}^{(0)}\right), \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial \xi} - \omega_3^{(0)} = \frac{\mu+\alpha}{4\alpha}\sigma_{12}^{(0)} - \frac{\mu-\alpha}{4\alpha}\sigma_{21}^{(0)}, \ \ \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial \eta} + \omega_3^{(0)} = \frac{\mu+\alpha}{4\alpha}\sigma_{21}^{(0)} - \frac{\mu-\alpha}{4\alpha}\sigma_{12}^{(0)}, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial \omega_3^{(0)}}{\partial \xi} = \frac{\mu a^2}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{13}^{(0)} - \frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{31}^{(0)}\right], \ \ \frac{\partial \omega_3^{(0)}}{\partial \eta} = \frac{\mu a^2}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{23}^{(0)} - \frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{32}^{(0)}\right], \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{21}^{(0)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{31}^{(0)}}{\partial \zeta} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_{12}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(0)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{32}^{(0)}}{\partial \zeta} = 0,$$
$$\frac{\partial \sigma_{13}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(0)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{33}^{(0)}}{\partial \zeta} = 0, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial \mu_{13}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mu_{23}^{(0)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mu_{33}^{(0)}}{\partial \zeta} + \sigma_{12}^{(0)} - \sigma_{21}^{(0)} = 0, \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial \mu_{31}^{(0)}}{\partial \zeta}=0, \qquad \frac{\partial \mu_{32}^{(0)}}{\partial \xi}=0, \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial \zeta}=-\frac{\nu}{2(1+\nu)}\left(\sigma_{11}^{(0)}+\sigma_{22}^{(0)}\right), \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial \xi}+\omega_2^{(0)}=\frac{\mu+\alpha}{4\alpha}\sigma_{13}^{(0)}-\frac{\mu-\alpha}{4\alpha}\sigma_{31}^{(0)}, \quad \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial \eta}-\omega_1^{(0)}=\frac{\mu+\alpha}{4\alpha}\sigma_{23}^{(0)}-\frac{\mu-\alpha}{4\alpha}\sigma_{32}^{(0)}, \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial \xi}=\frac{\mu a^2}{\gamma}\left[\frac{\beta+\gamma}{3\beta+2\gamma}\mu_{11}^{(0)}-\frac{\beta}{2(3\beta+2\gamma)}\mu_{22}^{(0)}-\frac{\beta}{2(3\beta+2\gamma)}\mu_{33}^{(0)}\right],\\
&\frac{\partial \omega_2^{(0)}}{\partial \eta}=\frac{\mu a^2}{\gamma}\left[\frac{\beta+\gamma}{3\beta+2\gamma}\mu_{22}^{(0)}-\frac{\beta}{2(3\beta+2\gamma)}\mu_{11}^{(0)}-\frac{\beta}{2(3\beta+2\gamma)}\mu_{33}^{(0)}\right],
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial \omega_2^{(0)}}{\partial \xi}=\frac{\mu a^2}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{12}^{(0)}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{21}^{(0)}\right], \quad \frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial \eta}=\frac{\mu a^2}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{21}^{(0)}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{12}^{(0)}\right], \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial \zeta}=\frac{\mu a^2}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{31}^{(0)}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{13}^{(0)}\right], \quad \frac{\partial \omega_2^{(0)}}{\partial \zeta}=\frac{\mu a^2}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{32}^{(0)}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{23}^{(0)}\right]. \tag{4.12}$$

Формулы (4.1) означают, что

$$u_1^{(0)}=\overset{0}{u}{}_1^{(0)}(\xi,\eta), \quad u_2^{(0)}=\overset{0}{u}{}_2^{(0)}(\xi,\eta), \qquad \omega_3^{(0)}=\overset{0}{\omega}{}_3^{(0)}(\xi,\eta). \tag{4.13}$$

Аналогично из (4.7) получим

$$\mu_{31}^{(0)}=\overset{0}{\mu}{}_{31}^{(0)}(\xi,\eta), \quad \mu_{32}^{(0)}=\overset{0}{\mu}{}_{32}^{(0)}(\xi,\eta). \tag{4.14}$$

Решая системы уравнений (4.2) и (4.3) будем иметь

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11}^{(0)}=\overset{0}{\sigma}{}_{11}^{(0)}(\varepsilon,\eta)=\frac{2}{1-\nu}\left(\frac{\partial \overset{0}{u}{}_1^{(0)}}{\partial \xi}+\nu\frac{\partial \overset{0}{u}{}_2^{(0)}}{\partial \eta}\right),\\
&\sigma_{22}^{(0)}=\overset{0}{\sigma}{}_{22}^{(0)}(\varepsilon,\eta)=\frac{2}{1-\nu}\left(\frac{\partial \overset{0}{u}{}_2^{(0)}}{\partial \eta}+\nu\frac{\partial \overset{0}{u}{}_1^{(0)}}{\partial \xi}\right),
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
&\sigma_{12}^{(0)}=\overset{0}{\sigma}{}_{12}^{(0)}(\varepsilon,\eta)=\frac{1}{\mu}\left[(\mu+\alpha)\left(\frac{\partial \overset{0}{u}{}_2^{(0)}}{\partial \xi}-\overset{0}{\omega}{}_3^{(0)}\right)+(\mu-\alpha)\left(\frac{\partial \overset{0}{u}{}_1^{(0)}}{\partial \eta}+\overset{0}{\omega}{}_3^{(0)}\right)\right],\\
&\sigma_{21}^{(0)}=\overset{0}{\sigma}{}_{21}^{(0)}(\varepsilon,\eta)=\frac{1}{\mu}\left[(\mu+\alpha)\left(\frac{\partial \overset{0}{u}{}_1^{(0)}}{\partial \eta}+\overset{0}{\omega}{}_3^{(0)}\right)+(\mu-\alpha)\left(\frac{\partial \overset{0}{u}{}_2^{(0)}}{\partial \xi}-\overset{0}{\omega}{}_3^{(0)}\right)\right].
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Из уравнений (4.4) определим соответственно $\mu_{13}^{(0)}$ и $\mu_{23}^{(0)}$:

$$\mu_{13}^{(0)}=\overset{0}{\mu}{}_{13}^{(0)}(\xi,\eta)=\frac{1}{\mu a^2}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\partial\overset{0}{\omega}{}_3^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\overset{0}{\mu}{}_{31}^{(0)},$$

$$\mu_{23}^{(0)}=\overset{0}{\mu}{}_{23}^{(0)}(\xi,\eta)=\frac{1}{\mu a^2}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\partial\overset{0}{\omega}{}_3^{(0)}}{\partial\eta}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\overset{0}{\mu}{}_{32}^{(0)}. \tag{4.17}$$

После интегрирования по ζ уравнений равновесия (4.5), (4.6) с учетом (4.15)-(4.17), для $\sigma_{31}^{(0)},\sigma_{32}^{(0)}$, и $\mu_{33}^{(0)}$ получим:

$$\sigma_{31}^{(0)}=\zeta\,\overset{1}{\sigma}{}_{31}^{(0)},\qquad \sigma_{32}^{(0)}=\zeta\,\overset{1}{\sigma}{}_{32}^{(0)},\qquad \mu_{33}^{(0)}=\zeta\,\overset{1}{\mu}{}_{33}^{(0)}, \tag{4.18}$$

где

$$\overset{1}{\sigma}{}_{31}^{(0)}=-\left(\frac{\partial\overset{0}{\sigma}{}_{11}^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\overset{0}{\sigma}{}_{21}^{(0)}}{\partial\eta}\right),\qquad \overset{1}{\sigma}{}_{32}^{(0)}=-\left(\frac{\partial\overset{0}{\sigma}{}_{12}^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\overset{0}{\sigma}{}_{22}^{(0)}}{\partial\eta}\right), \tag{4.19}$$

$$\overset{1}{\mu}{}_{33}^{(0)}=-\left(\frac{\partial\overset{0}{\mu}{}_{13}^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\overset{0}{\mu}{}_{23}^{(0)}}{\partial\eta}+\overset{0}{\sigma}{}_{12}^{(0)}-\overset{0}{\sigma}{}_{21}^{(0)}\right). \tag{4.20}$$

Остальные уравнения (4.8)-(4.12) служат для определения величин: $u_3^{(0)},\omega_1^{(0)},\omega_2^{(0)},\mu_{11}^{(0)},\mu_{22}^{(0)},\mu_{12}^{(0)},\mu_{21}^{(0)},\sigma_{13}^{(0)},\sigma_{23}^{(0)},\sigma_{33}^{(0)}$.

Введем усредненные усилия и моменты по формулам:

$$T_{11}=\int_{-h}^{h}\sigma_{11}dx_3,\quad T_{22}=\int_{-h}^{h}\sigma_{22}dx_3,\quad S_{12}=\int_{-h}^{h}\sigma_{12}dx_3,\quad S_{21}=\int_{-h}^{h}\sigma_{21}dx_3, \tag{4.21}$$

$$L_{13}=\int_{-h}^{h}\mu_{13}dx_3,\quad L_{23}=\int_{-h}^{h}\mu_{23}dx_3. \tag{4.22}$$

Принимая во внимание граничные условия (1.6),и, далее, формулы (4.15), (4.16), (4.17), с учетом понятий усредненных усилий и моментов (4.21), (4.22), на уровне исходного асимптотического приближения получим основные уравнения плоского напряженного состояния микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений:

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial S_{21}}{\partial x_2}=-\left(p_1^+ + p_1^-\right),$$

$$\frac{\partial S_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{22}}{\partial x_2}=-\left(p_2^+ + p_2^-\right), \tag{4.23}$$

$$\frac{\partial L_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{23}}{\partial x_2}+S_{12}-S_{21}=-\left(m_3^+ + m_3^-\right),$$

Физические соотношения

$$T_{11} = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\Gamma_{11} + \nu\Gamma_{22}\right), \quad T_{22} = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\Gamma_{22} + \nu\Gamma_{11}\right), \tag{4.24}$$

$$S_{12} = 2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{12} + (\mu-\alpha)\Gamma_{21}\right], \quad S_{21} = 2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{21} + (\mu-\alpha)\Gamma_{12}\right], \tag{4.25}$$

$$L_{13} = 2h\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}k_{13} + \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}h\left(m_1^+ - m_1^-\right), \; L_{23} = 2h\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}k_{23} + \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}h\left(m_2^+ - m_2^-\right), \tag{4.26}$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \Gamma_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \Gamma_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \Omega_3, \tag{4.27}$$

$$k_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1}, \quad k_{23} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_2}. \tag{4.28}$$

5. Построение погранслоя. Обратимся к изучению краевых явлений несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений в тонкой трехмерной области пластинки. Краем пластинки, вблизи которого будем исследовать напряженное состояние пограничного слоя, допустим будет граничная плоскость пластинки $x_1 = 0$.

К уравнениям (1.1)-(1.3) пространственной задачи несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений применим преобразование растяжения масштаба:

$$\frac{x_1}{h} = \xi_1, \quad \frac{hx_2}{a^2} = \eta_1, \quad \frac{x_3}{h} = \zeta \tag{5.1}$$

и перейдем к безразмерным величинам по формулам (2.2), (1.8).

Решение преобразованной таким образом системы отыщем в виде асимптотического разложения

$$R = \sum_{s=0}^{S} \delta^{\chi_R + s} R^{(s)} \, , \tag{5.2}$$

где R -любая из величин рассматриваемой задачи. Так как силовые и моментные неоднородные граничные условия (1.4) (либо (1.5), либо (1.6)), заданные на лицевых плоскостях пластинки $\zeta = \pm 1$, были удовлетворены решением внутренней задачи, то решение (5.2) должно удовлетворять следующим однородным граничным условиям:

$$\overline{\sigma}_{3i} = \overline{\sigma}_{33} = 0, \quad \overline{\mu}_{3i} = \overline{\mu}_{33} = 0 \quad \text{при } \zeta = \pm 1. \tag{5.3}$$

После подстановки (5.2) в преобразованную систему уравнений (1.1)-(1.3) с учетом (2.4) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра δ в правых и левых частях, начиная с наименьшей, получим непротиворечивую систему рекуррентных уравнений относительно величин $R^{(S)}$, если

$$\overline{\sigma}_{mn} = \delta^{\chi} \sum_{s=0}^{S} \delta^{s} \sigma_{mn}^{(S)}, \quad \overline{V}_{n} = \delta^{\chi+1} \sum_{s=0}^{S} \delta^{S} V_{n}^{(S)},$$

$$\mu_{mn} = \delta^{\chi+1} \sum_{s=0}^{S} \delta^{S} \mu_{mn}^{(S)}, \quad \omega_{n} = \delta^{\chi+2} \sum_{s=0}^{S} \delta^{S} \omega_{n}^{(S)}, \quad m,n = 1,2,3. \tag{5.4}$$

Полученную систему уравнений в асимптотических приближениях s можем представить в следующем виде:

$$\frac{\partial \sigma_{11}^{(s)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{21}^{(s-2)}}{\partial \eta_1} + \frac{\partial \sigma_{31}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0,\ \frac{\partial \sigma_{12}^{(s)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(s-2)}}{\partial \eta_1} + \frac{\partial \sigma_{32}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0,\ \frac{\partial \sigma_{13}^{(s)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(s-2)}}{\partial \eta_1} + \frac{\partial \sigma_{33}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0,$$

$$\frac{\partial \mu_{11}^{(s)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \mu_{21}^{(s-2)}}{\partial \eta_1} + \frac{\partial \mu_{31}^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{23}^{(s)} - \sigma_{32}^{(s)} = 0,\ \frac{\partial \mu_{12}^{(s)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \mu_{22}^{(s-2)}}{\partial \eta_1} + \frac{\partial \mu_{32}^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{31}^{(s)} - \sigma_{13}^{(s)} = 0,$$

$$\frac{\partial \mu_{13}^{(s)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \mu_{23}^{(s-2)}}{\partial \eta_1} + \frac{\partial \mu_{33}^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{12}^{(s)} - \sigma_{21}^{(s)} = 0,\ \frac{\partial v_1^{(s)}}{\partial \xi_1} = \frac{1}{2(1+\upsilon)}\left[\sigma_{11}^{(s)} - \upsilon\sigma_{22}^{(s)} - \upsilon\sigma_{33}^{(s)}\right],$$

$$\frac{\partial v_2^{(s-2)}}{\partial \eta_1} = \frac{1}{2(1+\upsilon)}\left[\sigma_{22}^{(s)} - \upsilon\sigma_{11}^{(s)} - \upsilon\sigma_{33}^{(s)}\right],\ \frac{\partial v_3^{(s)}}{\partial \zeta} = \frac{1}{2(1+\upsilon)}\left[\sigma_{33}^{(s)} - \upsilon\sigma_{11}^{(s)} - \upsilon\sigma_{22}^{(s)}\right], \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial v_2^{(s)}}{\partial \xi_1} - \omega_3^{(s-2)} = \frac{\mu+\alpha}{4\alpha}\sigma_{12}^{(s)} - \frac{\mu-\alpha}{4\alpha}\sigma_{21}^{(s)},$$

$$\frac{\partial v_1^{(s-2)}}{\partial \eta_1} + \omega_3^{(s-2)} = \frac{\mu+\alpha}{4\alpha}\sigma_{21}^{(s)} - \frac{\mu-\alpha}{4\alpha}\sigma_{12}^{(s)},$$

$$\frac{\partial v_3^{(s)}}{\partial \xi_1} + \omega_2^{(s-2)} = \frac{\mu+\alpha}{4\alpha}\sigma_{13}^{(s)} - \frac{\mu-\alpha}{4\alpha}\sigma_{31}^{(s)},\ \frac{\partial v_1^{(s)}}{\partial \zeta} - \omega_2^{(s-2)} = \frac{\mu+\alpha}{4\alpha}\sigma_{31}^{(s)} - \frac{\mu-\alpha}{4\alpha}\sigma_{13}^{(s)},$$

$$\frac{\partial v_3^{(s-2)}}{\partial \eta_1} - \omega_1^{(s-2)} = \frac{\mu+\alpha}{4\alpha}\sigma_{23}^{(s)} - \frac{\mu-\alpha}{4\alpha}\sigma_{32}^{(s)},$$

$$\frac{\partial v_2^{(s)}}{\partial \xi} + \omega_1^{(s-2)} = \frac{\mu+\alpha}{4\alpha}\sigma_{32}^{(s)} - \frac{\mu-\alpha}{4\alpha}\sigma_{23}^{(s)},$$

$$\frac{\partial \omega_1^{(s)}}{\partial \xi_1} = \frac{\mu a^2}{\gamma}\frac{\beta+\gamma}{3\beta+2\gamma}\left[\mu_{11}^{(s)} - \frac{\beta}{2(\beta+\gamma)}\left(\mu_{22}^{(s)} + \mu_{33}^{(s)}\right)\right],$$

$$\frac{\partial \omega_2^{(s-2)}}{\partial \eta_1} = \frac{\mu a^2}{\gamma}\frac{\beta+\gamma}{3\beta+2\gamma}\left[\mu_{22}^{(s)} - \frac{\beta}{2(\beta+\gamma)}\left(\mu_{11}^{(s)} + \mu_{33}^{(s)}\right)\right],$$

$$\frac{\partial \omega_3^{(s)}}{\partial \zeta} = \frac{\mu a^2}{\gamma}\frac{\beta+\gamma}{3\beta+2\gamma}\left[\mu_{33}^{(s)} - \frac{\beta}{2(\beta+\gamma)}\left(\mu_{11}^{(s)} + \mu_{22}^{(s)}\right)\right],$$

$$\frac{\partial \omega_2^{(s)}}{\partial \xi_1} = \frac{\mu a^2}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{12}^{(s)} - \frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{21}^{(s)}\right],\ \frac{\partial \omega_1^{(s-2)}}{\partial \eta_1} = \frac{\mu a^2}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{21}^{(s)} - \frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{12}^{(s)}\right], \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial\omega_3^{(s)}}{\partial\xi_1}=\frac{\mu a^2}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{13}^{(s)}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{31}^{(s)}\right],\ \frac{\partial\omega_1^{(s)}}{\partial\zeta}=\frac{\mu a^2}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{31}^{(s)}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{13}^{(s)}\right],$$

$$\frac{\partial\omega_3^{(s-2)}}{\partial\eta_1}=\frac{\mu a^2}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{23}^{(s)}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{32}^{(s)}\right],\ \frac{\partial\omega_2^{(s)}}{\partial\zeta}=\frac{\mu a^2}{\gamma}\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{32}^{(s)}-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\mu_{23}^{(s)}\right].$$

Забегая вперед отметим, что погранслойная задача отлично от нуля при любом s-четном или нечетном.

Важно констатировать, что, при любом s, решение погранслойных уравнений (5.5), (5.6) обладает некоторыми важными свойствами, которые можем получить непосредственно из указанных уравнений, если к ним применим следующие интегральные операторы:

$$\int_{-1}^{1}d\zeta\int_{0}^{\infty}d\xi_1,\quad \int_{-1}^{1}\zeta d\zeta\int_{0}^{\infty}d\xi_1,\quad \int_{-1}^{1}d\zeta\int_{0}^{\infty}\xi_1 d\xi_1.$$

В итоге будем иметь следующие интегральные соотношения, которые иначе называют условиями затухания решения задачи пограничного слоя. Приведем их для исходного $(s=0)$ и первого $(s=1)$ асимптотических приближений (которые в далнейшем будем исползовать): в случае задачи изгиба

$$\int_{-1}^{1}\sigma_{13}^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta=0, \tag{5.7}$$

$$\int_{-1}^{1}\zeta\sigma_{11}^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta+\frac{4\alpha}{\mu-\alpha}\int_{-1}^{1}V_3^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta=0, \tag{5.8}$$

$$\int_{-1}^{1}\mu_{11}^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta-\frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\int_{-1}^{1}\zeta\sigma_{12}^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta=0, \tag{5.9}$$

$$\int_{-1}^{1}\mu_{12}^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta+\int_{-1}^{1}\zeta\sigma_{11}^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta=0, \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\omega_1^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta-\frac{\mu a^2}{\gamma}\frac{2\alpha}{\mu}\frac{\gamma}{2(\beta+\gamma)}\int_{-1}^{1}\zeta V_2^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta+\\+\frac{\mu a^2}{\gamma}\frac{\beta}{4(\beta+\gamma)}\int_{-1}^{1}\zeta\mu_{13}^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta=0,\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\frac{\beta}{\mu a^2}\int_{-1}^{1}\frac{\partial\omega_3^{(s)}}{\partial\zeta}(\xi_1=0)d\zeta+\frac{\beta+2\gamma}{\mu a^2}\int_{-1}^{1}\frac{\partial\omega_1^{(s)}}{\partial\xi_1}(\xi_1=0)d\zeta=\int_{-1}^{1}\mu_{11}^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta, \tag{5.12}$$

$$2\int_{-1}^{1}\zeta V_1^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta=\frac{\gamma+\varepsilon}{\mu a^2}\int_{-1}^{1}\omega_2^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta-\frac{\nu}{2}\int_{-1}^{1}\zeta^2\sigma_{13}^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta,\ s=0,1. \tag{5.13}$$

в случае задачи плоского напряженного состояния

$$\int_{-1}^{1}\sigma_{11}^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta=0, \tag{5.14}$$

$$\int_{-1}^{1}\sigma_{12}^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta=0, \tag{5.15}$$

$$\int_{-1}^{1}\mu_{13}^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta+\frac{2\alpha}{\mu}\int_{-1}^{1}V_2^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta=0, \tag{5.16}$$

$$\begin{gathered}\int_{-1}^{1}\omega_3^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta+\frac{\mu a^2}{\gamma}\frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\int_{-1}^{1}\zeta\mu_{11}^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta-\\-\frac{\alpha}{\mu+\alpha}\int_{-1}^{1}\zeta^2\sigma_{12}^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta=0,\end{gathered} \tag{5.17}$$

$$\int_{-1}^{1}V_1^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta+\frac{\nu}{2}\int_{-1}^{1}\zeta\sigma_{13}^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta=0. \tag{5.18}$$

здесь $s=0{,}1$.

Отметим, что равенства (5.7)-(5.13) и (5.14)-(5.18) являются свойствами решения общего погранслоя. Дело в том, что внутренняя задача взаимодействует ни с общим погранслоем, а погранслоем частного вида. Например, на основании равенства (5.8), можем частному погранслою приписывать равенство

$$\int_{-1}^{1}\zeta\sigma_{11}^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta=0,\quad s=0{,}1. \tag{5.19}$$

Это равенство можем использовать при сращивании внутреннего итерационного процесса и погранслоя. В итоге будем получить соответствующее граничное условие для прикладной теории микрополярных пластин. Получим также определенное граничное условие для погранслойной задачи. Получается,что решение такого частного погранслоя автоматически будет удовлетворять условию

$$\int_{-h}^{h}V_3^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta=0,\quad s=0{,}1. \tag{5.20}$$

В зависимости от вида заданных на $x_1=0$ трехмерных граничных условий, можем на этот раз для другого частного погранслоя приписывать условие (5.20), тогда равенство (5.19) будет вступать как свойство этого погранслойного решения.

В дальнейшем будем аналогичным образом поступать при рассмотрении равенств (5.9)-(5.13), (5.16), (5.17), (5.18) (с целью построения соответствующих частных погранслоев).

Условия типа (5.19) и (5.20) и аналогичные (о которых выше шла речь), можем обосновать также следующим образом:

если будем потребовать выполнения условий (5.8)-(5.13) либо (5.16)-(5.18) для любого материала удовлетворяющего требованиям (2.4).

6. Сращивание асимптотических разложений внутреннего итерационного процесса и погранслоя. Получение граничных условий для прикладных двумерных теорий (для задачи изгиба и для задачи плоского напряженного состояния).

Таким образом построены два типа решений: решение внутренней задачи и решение для погранслойной задачи. Их сумма

$$I = \overset{\text{вн}}{Q} + \overset{\text{п.с}}{R} \tag{6.1}$$

является решением исходной сингулярно-возмущенной краевой задачи несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений в тонкой трехмерной области пластинки. Здесь $\overset{\text{вн}}{Q}$ – решение внутренней задачи, $\overset{\text{п.с}}{R}$ – сумма решений всех погранслойных задач (при этом будем считать, что если речь идет о погранслое около определенной боковой стороны пластинки, то влияние погранслоя противоположенной стороны необходимо пренебрегать). Отметим, что $\overset{\text{п.с}}{R}$ в общем случае выражается следующим образом:

$$\overset{\text{п.с}}{R} = \delta^{\chi} \sum \delta^{s} \overset{\text{п.с}}{R}_{p} + \delta^{\mu} \sum \delta^{s} \overset{\text{п.с}}{R}_{a}, \tag{6.2}$$

где $\overset{\text{п.с}}{R}_{p}$ и $\overset{\text{п.с}}{R}_{a}$ -соответственно плоский и антиплоский погранслои, χ и μ -интенсивности этих погранслоев, которые подлежат к определению при изучении задачи о сращивании внутреннего итерационного процесса и погранслоя (с целью получения итерационного процесса выполнения граничных условий на поверхности края пластинки).

Теперь перейдем к изучению задачи разделения трехмерных граничных условий на боковой поверхности пластинки Σ, в рамках которого необходимо выяснить вопрос о том, какие граничные условия надо приписывать к внутренним (к прикладной теории) и какие к погранслойным дифференциальным уравнениям. Эту задачу будем рассматривать отдельно для случая изгиба и отдельно для случая плоского напряженного состояния.

Для задачи изгиба рассматрим три отдельные случаи граничных условий: а) загруженный край, б) трехмерные граничные условия, которые в прикладной теории называются условиями шарнирного опиирания, в) защемленный край.

При загруженном крае (пусть этот край представляет собой плоскость $x_1 = 0$) имеем:

$$\sigma_{1k} = p_k^*, \quad \mu_{1k} = m_k^* \quad (k = 1,2,3). \tag{6.3}$$

С учетом (6.1), (2.3), (2.5), (5.4), (6.2) на основании (6.3) получим итерационный процесс выполнения этих граничных условий, если $\chi = \mu = -1$:

$$\overset{\text{вн}(s-1)}{\sigma_{1i}} + \overset{\text{пс}(s)}{\sigma_{1i}} = \tilde{p}_i^{*(s-1)}, \quad i = 1,2 \tag{6.4}$$

$$\overset{\text{вн}(s)}{\sigma_{13}} + \overset{\text{пс}(s)}{\sigma_{13}} = \tilde{p}_3^{*(s)}, \tag{6.5}$$

$$\overset{\text{вн}(s)}{\mu_{1i}} + \overset{\text{пс}(s)}{\mu_{1i}} = \tilde{m}_i^{*(s)}, \quad i = 1,2 \tag{6.6}$$

$$\overset{\text{вн}(s-1)}{\mu_{13}} + \overset{\text{пс}(s)}{\mu_{13}} = \tilde{m}_3^{*(s-1)}, \tag{6.7}$$

где $$\tilde{p}_i^{*(0)} = \frac{p_1^*}{\mu}, \quad \tilde{p}_i^{*(s)} = 0, \quad s \geq 1, \qquad \tilde{p}_3^{*(0)} = \frac{p_3^*}{\mu \cdot \delta^{-1}}, \quad \tilde{p}_3^{*(s)} = 0, \quad s \geq 1, \tag{6.8}$$

$$\tilde{m}_i^{*(0)} = \frac{m_1^*}{\mu a \delta^{-1}}, \quad \tilde{m}_i^{*(s)} = 0, \quad s \geq 1, \qquad \tilde{m}_3^{*(0)} = \frac{m_3^*}{\mu \cdot a}, \quad \tilde{m}_3^{*(s)} = 0, \quad s \geq 1. \tag{6.9}$$

При $s = 0$, из (6.5) будем иметь

$$\overset{\text{вн}\,(0)}{\sigma_{13}} + \overset{\text{пс}\,(0)}{\sigma_{13}} = \tilde{p}_3^{*(0)}. \tag{6.10}$$

Имея в виду формулы (3.15), которые означают, что $\overset{\text{вн}\,(0)}{\sigma_{13}}$ – не зависит от поперечной координаты ζ, используя равенство (5.7), из (6.10) для прикладной теории изгиба микрополярных пластин ((3.39)-(3.51)) получим один из граничных условий при $x_1 = 0$ (в размерном виде):

$$N_{13} = \int_{-h}^{h} p_3^* dx_3. \tag{6.11}$$

Аналогичным образом на основании (3.19), (3.20), как выше говорили, от погранслойного решения (частного погранслоя) потребляя условия (имеем ввиду равенства (5.9), (5.10)):

$$\int_{-h}^{h} \mu_{11}^{(0)}(\xi_1 = 0) d\zeta = 0, \qquad \int_{-h}^{h} \mu_{12}^{(0)}(\xi_1 = 0) d\zeta = 0, \tag{6.12}$$

для прикладной теории (3.39)-(3.51) получим еще две граничные условия при $x_1 = 0$:

$$L_{11} = \int_{-h}^{h} m_1^* dx_3, \qquad L_{12} = \int_{-h}^{h} m_2^* dx_3. \tag{6.13}$$

Чтобы получить граничные условия для $M_{11}, M_{12}, \Lambda_{13}$, поступим следующим образом.

Рассматривая граничное условие (6.4) при $s = 1$, будем иметь

$$\overset{\text{вн}\,(0)}{\sigma_{1i}} + \overset{\text{пн}\,(1)}{\sigma_{1i}} = \tilde{p}_i^{*(1)}, \qquad i = 1,2. \tag{6.14}$$

К рассмотренному частному виду погранслоя далее приписываем равенство (5.9) при $s=1$ и, следующее равенство (имеем ввиду равенство (5.9), при $s=1$):

$$\int_{-1}^{1} \zeta \sigma_{12}^{(1)} (\xi_1 = 0) d\zeta = 0\,, \tag{6.15}$$

Тогда, используя формулы (2.3), (2.5), (3.18), для прикладной теории (3.39)-(3.51) получим две граничные условия при $x_1 = 0$:

$$M_{11} = \int_{-h}^{h} x_3 p_1^* dx_3\,, \quad M_{12} = \int_{-h}^{h} x_3 p_2^* dx_3\,. \tag{6.16}$$

Аналогично, на основе равенств (5.11), к рассмотренному частному погранслою приписывая еще условие

$$\int_{-1}^{1} \zeta \mu_{13}^{(1)} (\xi_1 = 0) d\zeta = 0\,, \tag{6.17}$$

используя выражения и формулы (2.3), (2.5), (3.22), для указанной прикладной теории получим еще одно граничное условие при $x_1 = 0$:

$$\Lambda_{13} = \int_{-h}^{h} x_3 m_3^* dx_3\,. \tag{6.18}$$

Таким образом, при $x_1 = 0$, для прикладной теории изгиба микрополярных пластин (3.39)-(3.51) будем иметь полный набор граничных условий, которые представляются равенствами (6.11), (6.13), (6.16) и (6.18).

Для выбранной погранслойной задачи (5.5), (5.6), из (6.4)-(6.7), при $s=0$, получим следующие граничные условия (при $\xi_1 = 0$):

$$\begin{aligned} &\overset{nc}{\sigma}{}_{11}^{(0)} = 0, \qquad \overset{nc}{\sigma}{}_{12}^{(0)} = 0, \\ &\overset{nc}{\sigma}{}_{13}^{(0)} = \tilde{p}_3^{*(0)} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{p}_3^{*(0)} d\zeta\,, \qquad \overset{nc}{\mu}{}_{13} = 0, \\ &\overset{nc}{\mu}{}_{11}^{(0)} = \tilde{m}_1^{*(0)} - \frac{1}{2}\int_{-}^{1} \tilde{m}_1^{*(0)} d\zeta\,, \qquad \overset{nc}{\mu}{}_{12}^{(0)} = \tilde{m}_2^{*(0)} - \frac{1}{2}\int_{-}^{1} \tilde{m}_2^{*(0)} d\zeta\,. \end{aligned} \tag{6.19}$$

После решения погранслойной граничной задачи (5.5),(5.6), (6.19) (около боковой грани $\xi_1 = 0$), это будет тот частный погранслой, который взаимодействует с прикладной теорией микрополярных пластин (3.39)-(3.51).Легко получить также и уравнения этого частного погранслоя ((5.5), (5.6)) и соответствующие им граничные условия, при $s=1$. Имея ввиду (5.19),(6.12),(6.15),(6.17)(как при $s=0$, так и при $s=1$), вытекающие при этом из выражений (5.8)-(5.12) равенства автоматически будут удовлетворены решением построенного частного погранслоя.

Рассмотрим, теперь следующий вариант трехмерных граничных условий при $x_1 = 0$:

$$\sigma_{1i} = p_i^*, \quad V_3 = 0, \qquad \mu_{1k} = m_k^* \qquad (i = 1,2; k = 1,2,3). \tag{6.20}$$

В этом случае (и здесь $\chi = \mu = -1$) остаются в силе равенства (6.4), (6.6), (6.7), а вместо (6.5) получим

$$\overset{\text{вн}(s)}{V_3} + \overset{\text{пс}(s)}{V_3} = 0. \tag{6.21}$$

Будем рассматривать новый, отличной от предыдущего, частный погранслой, для которого остаются в силе требования (6.12), (6.15), (6.17), только в этом случае сначала (при $s = 0$) будем потребовать условие (5.20) (а равенство (5.19) при $s = 0$ будет следствием).

Таким образом остаются в силе двумерные граничные условия (6.13), (6.16), (6.18), а на место граничного условия (6.11) получим (при $x_1 = 0$)

$$w = 0. \tag{6.22}$$

Граничные условия (6.22), (6.13), (6.16), (6.18) для прикладной двумерной теории представляют собой условия шарнирного опирания.

Имея граничные условия для прикладной-двумерной теории, из равенств (6.4)-(6.7), при $s = 0$, можем получить граничные условия построенной частной погранслойной задачи.

И, наконец, рассмотрим граничные условия жесткого защемления:

$$V_k = 0, \quad \omega_k = 0 \qquad (k = 1,2,3). \tag{6.23}$$

Для этого случая также $\chi = \mu = -1$. Равенства, представляющие трехмерные условия жесткого защемления, в асимптотических приближениях будут иметь вид:

$$\overset{\text{вн}(s-1)}{V_i} + \overset{\text{пс}(s)}{V_i} = 0, \quad (i = 1,2) \tag{6.24}$$

$$\overset{\text{вн}(s)}{V_3} + \overset{\text{пс}(s)}{V_3} = 0, \tag{6.25}$$

$$\overset{\text{вн}(s)}{\omega_i} + \overset{\text{пс}(s)}{\omega_i} = 0, \quad (i = 1,2) \tag{6.26}$$

$$\overset{\text{вн}(s-1)}{\omega_3} + \overset{\text{пс}(s)}{\omega_3} = 0. \tag{6.27}$$

Будем строить соответствующий частный погранслой, для которого потребуем условия (имеем ввиду возможности из равенств (5.11), (5.8), (5.12), (5.13)):

$$\int_{-1}^{1} \overset{nc(0)}{\omega_i} (\xi_1 = 0) d\xi = 0 \qquad (i = 1,2), \tag{6.28}$$

$$\int_{-1}^{1} \overset{nc(0)}{V_3} (\xi_1 = 0) d\xi = 0, \tag{6.29}$$

а при $s=1$, следующие условия

$$\int_{-1}^{1}\zeta V_i^{(1)}(\xi_1=0)d\xi=0 \quad (\mathrm{i}=1,2), \qquad \int_{-1}^{1}\frac{\partial\omega_3^{(1)}}{\partial\zeta}(\xi_1=0)d\xi=0, \tag{6.30}$$

в результате, получим набор граничных условий жесткого защемления (при $x_1=0$) для прикладной-двумерной теории изгиба микрополярных пластин:

$$\psi_i=0, \quad w=0, \quad \Omega_i=0, \quad \iota=0. \tag{6.31}$$

Перейдем теперь к изучению задачи сращивания внутреннего итерационного процесса и погранслоя для обобщенного плоского напряженного состояния.

Сначала рассмотрим граничные условия первой граничной задачи (6.3).

С учетом (6.1), (2.3), (2.8), (5.4), (6.2), на основании (6.3) получим итерационный процесс выполнения этих граничных условий, если $\chi=\mu=-2$:

$$\overset{\text{вн}(s)}{\sigma_{1i}}+\overset{\text{пс}(s)}{\sigma_{1i}}=\tilde{p}_i^{*(s)} \quad (i=1,2), \tag{6.32}$$

$$\overset{\text{вн}(s-1)}{\sigma_{13}}+\overset{\text{пс}(s)}{\sigma_{13}}=\tilde{p}_3^{*(s-1)}, \tag{6.33}$$

$$\overset{\text{вн}(s-1)}{\mu_{1i}}+\overset{\text{пс}(s)}{\mu_{1i}}=\tilde{m}_i^{*(s-1)} \qquad i=1,2, \tag{6.34}$$

$$\overset{\text{вн}(s)}{\mu_{13}}+\overset{\text{пс}(s)}{\mu_{13}}=\tilde{m}_3^{*(s)}. \tag{6.35}$$

Будем использовать свойства погранслойного решения (5.14)-(5.16)при $s=0$.

В случае граничных условий (6.32) $(i=1,2)$, применяя равенства (5.14), (5.15), получим следующие две граничные условия для обобщенного плоского напряженного состояния микрополярных пластин (4.23)-(4.28), при $x_1=0$:

$$T_{11}=\int_{-h}^{h}p_1^* dx_3, \qquad S_{12}=\int_{-h}^{h}p_2^* dx_3. \tag{6.36}$$

Для построенного погранслоя (имея ввиду (5.16)) потребуем еще условие

$$\int_{-1}^{1}\mu_{13}^{(0)}(\xi_1=0)d\zeta=0 \tag{6.37}$$

Тогда решение этого частного погранслоя автоматически будет удовлетворять условию $\int_{-1}^{1}V_2^{(0)}(\xi_1=0)d\zeta=0.$

Если в (6.35) от погранслойного решения потребуем условие (6.37), тогда приходим к следующему граничному условию для прикладной теории микрополярных пластин(4.23)-(4.28), при $x_1=0$:

$$L_{13}=\int_{-h}^{h}m_3^* dx_3. \tag{6.38}$$

Таким образом граничные условия (6.36), (6.38) при $x_1 = 0$, представляют собой весь комплекс граничных условий для обобщенного плоского напряженного состояния микрополярных упругих тонких пластин (4.23)-(4.28).

Что касается граничных условий, при $\xi_1 = 0$, для построенной погранслойной задачи (5.5), (5.6), то для них из (6.32)-(6.35) будем иметь:

$$\overset{\text{пс}(0)}{\sigma_{1i}} = \tilde{p}_i^{*(0)} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{p}_i^{*(0)} d\zeta \quad i = 1,2,$$

$$\overset{\text{пс}(0)}{\sigma_{13}} = 0, \tag{6.39}$$

$$\overset{\text{пс}(0)}{\mu_{1i}} = 0 \quad i = 1,2,$$

$$\overset{\text{пс}(0)}{\mu_{13}} = \tilde{m}_3^{*(0)} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{m}_3^{*(0)} d\zeta.$$

Если построить решение граничной задачи (5.5),(5.6),(6.39), то это погранслойное решение, при $\xi_1 = 0$, будет автоматически удовлетворять следующему равенству (к которому приходим из (5.16) с учетом (6.37)):

$$\int_{-1}^{1} \overset{пс(0)}{V_2} (\xi_1 = 0) d\zeta = 0. \tag{6.40}$$

Рассмотрим теперь граничные условия жесткой заделки, при $x_1 = 0$ (условия (6.23)). В этом случае тоже $\chi = \mu = -2$.

В итоге получим нижеприведенные равенства, представляющие итерационный процесс выполнения трехмерных граничных условий (6.23):

$$\overset{\text{вн}(s)}{V_i} + \overset{\text{пс}(s)}{V_i} = 0, \tag{6.41}$$

$$\overset{\text{вн}(s-1)}{V_3} + \overset{\text{пс}(s)}{V_3} = 0, \tag{6.42}$$

$$\overset{\text{вн}(s-1)}{\omega_i} + \overset{\text{пс}(s)}{\omega_i} = 0, \tag{6.43}$$

$$\overset{\text{вн}(s)}{\omega_3} + \overset{\text{пс}(s)}{\omega_3} = 0. \tag{6.44}$$

При этом будем представлять частный погранслой, для которого будем требовать выполнения следующих условий (имеем ввиду равенства (5.16), (5.17)):

$$\int_{-1}^{1} V_2^{(0)}(\xi_1 = 0) d\zeta = 0, \qquad \int_{-1}^{1} \omega_3^{(0)}(\xi_1 = 0) d\zeta = 0. \tag{6.45}$$

Применяя равенства (6.45), из равенств (6.41), (6.44) получим все три граничные условия прикладной теории (4.23)-(4.28), при $x_1 = 0$:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \Omega_3 = 0. \tag{6.46}$$

Что касается граничных условий построенной погранслойной задачи, то они будут следовать из (6.41)-(6.44), учитывая при этом условия прикладной теории (6.46).

Решение этого погранслоя на этот раз будет удовлетворять условию (6.37), а также, следующему условию вытекающего из равенства (5.17):

$$\frac{\mu a^2}{\gamma}\frac{\gamma-\varepsilon}{4\varepsilon}\int_{-1}^{1}\zeta\mu_{11}^{(0)}(\xi_1=0)d\zeta-\frac{\alpha}{\mu+\alpha}\int_{-1}^{1}\zeta^2\sigma_{12}^{(0)}(\xi_1=0)d\zeta=0.$$

7. Сравнение прикладных моделей микрополярных упругих тонких пластин построенных на основе асимптотического метода и метода гипотез. В случае задачи изгиба, сравнив основные уравнения (3.39)-(3.51) и граничные условия ((6.11), (6.13), (6.16), (6.18) (либо (6.13), (6.16), (6.18) и (6.22) либо (6.31)) можем заключить, что если в выражениях моментов (3.42) будем пренебрегать слагаемые $\frac{h^2}{3}\frac{\nu}{1-\nu}\left(p_3^+ + p_3^-\right)$ (с учетом также нижеприведенного рассуждения), то получим модель работы [12], которая построена на основе метода гипотез. Отметим, что такое пренебрежение оправдано (это означает, что в обобщенном законе Гука (1.2) для γ_{ii}, силовое напряжение σ_{33} весьма мало по сравнению с силовым напряжением σ_{ii}). Отметим, также, что как показывают расчеты, таким же образом, в обобщенном законе Гука (1.2) для χ_{i3}, моментное напряжение μ_{3i} можно пренебрегать относительно моментного напряжения μ_{i3}. В итоге в равенствах (3.46) можно пренебрегать соответственно слагаемые $\frac{h^2}{3}\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\left(m_1^+ + m_1^-\right)$ и $\frac{h^2}{3}\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\left(m_2^+ + m_2^-\right)$.

Что касается обобщенного плоского напряженного состояния микрополярных пластин, можем утверждать, что обе модели микрополярных пластин (асимптотический и полученное на основе метода гипотез), полностью совпадают друг с другом.

Весьма важно констатировать, что полученные асимптотическим методом выражения (3.12), (3.13) для компонентов вектора перемещения– это, по сути дела, кинематические гипотезы Тимошенко в классической теории изгиба пластин [20-22]. Имея это обстоятельство в виду, в работе [12] (и в аналогичном случае при построении моделей микрополярных балок и оболочек [13-16]), во первых, выражения (3.12),(3.13) в целом принята как кинематическая гипотеза при построении модели микрополярных упругих тонких пластин и, во вторых, эта гипотеза названо обобщенной на микрополярный случай гипотезой Тимошенко.

В случае обобщенного плоского напряженного состояния микрополярных пластин, аналогичным образом, полученные асимптотическим методом качественные результаты (4.13), можно положить в основу построения этой модели как кинематические гипотезы.

Отметим, что кроме кинематических гипотез, в работе [12], при построении прикладной теории микрополярных пластин, приняты также некоторые другие гипотезы (статические гипотезы), которые тоже соответствуют качественным результатам асимптотического метода.

Ս. Հ.Սարգսյան

Միկրոպոլյար առաձգական բարակ սալերի մաթեմատիկական մոդելների կառուցման ասիմպտոտիկ մեթոդը

Աշխատանքում փոքր պարամետրով սինգուլյար գրգռված հավասարումների լուծման ասիմպտոտիկ մեթոդի կիրառմամբ կառուցվել են միկրոպոլյար առաձգական բարակ սալերի ինչպես ծռման դեֆորմացիայի, այնպես էլ ընդհանրացված հարթ լարվածային վիճակի մաթեմատիկական մոդելները: Տրվում է մաթեմատիկական հիմնավորում վարկածների մեթոդի հիման վրա կառուցված համապատասխան տեսությունններին:

S.H.Sargsyan

Asymptotic Method of Construction of Mathematical Models of Micropolar Elastic Thin Plates

In the present paper mathematical models of micropolar elastic thin plates are constructed for bending deformation and generalized plane stress state on the basis of the asymptotic method of solution of singularly perturbed with small parameter system of differential equations in partial derivatives. Mathematical justification for analogical theories, constructed on the basis of hypotheses method, is given.

Литература

1. *Ворович И. И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // Тр. II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Выпуск 3. М.: Изд-во “Наука”.1966. С. 116-136.*
2. *Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.:Изд-во“Наука”.1976. 510с.*
3. *Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек М: Изд-во “Наука”. 1997. 414 с.*
4. *Friedrichs K. O. Kirchhoff’s boundary conditions and the edge effect for elastic plates//Proc. Sympos. Appl. Math.New York: Amer. Math. Soc. 1950.*
5. *Friedrichs K. O. and Dressler R.F. A boundary layer theory for elastic plates // Comm: Pure and Apll. Math. 1961. Vol. 14. N1. P. 1-33.*
6. *Green A. E. On the linear theory of thin elastic shells // Proc. Roy. Soc. 1962. A-266. N1325.*
7. *Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. Dynamics of thin wolled elastic bodies.San-Diego: Academic Press. 1998. 225p.*

8. *Rogacheva N.N. The theory of piezoelectric plates and shells. London: Boca Ration. SRS Press. 1994. 260p.*
9. *Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд-во АН Армении. 1992. 232с.*
10. *Устинов Ю.А., Шленев М.А. О некоторых направлениях развития асимптотического метода плит и оболочек // Межвузовский сборник «Расчет оболочек и пластин. Ростов-на-Дону. Изд-во Ростовского Инженерно-строительного ин-та. 1978. С. 3-27.*
11. *Саркисян С.О.Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости.// Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. N. 2. С. 129-147.*
12. *Саркисян С.О.Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жесткостных характеристик.// Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т.53. Вып. 2. С. 148-156.*
13. *Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек// Физическая мезомеханика. 2011.Т. 14.N1. С. 55-66.*
14. *Sargsyan S.H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars// Journal of Materials Science and Engineering. 2012. Vol.2. N1. P.98-108.*
15. *Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек// Доклады Академии Наук России. 2011. Том 436. N2. С.195-198.*
16. *Sargsyan S.H. Mathematical Models of Micropolar Elastic Thin Shells// Advanced Structured Materials. Shell-like Structures. Non-classical Theories and Applications. Springer.2011.Vol. 15. P.91-100.*
17. *Пальмов В. А. Основные уравнения теория несимметричной упругости // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. Вып. 6. С. 1117-1120.*
18. *Новацкий В. Теория упругости. М.: Изд-во "Мир". 1975. 862с.*
19. *Бабич В.М., Булдырев В.С. Искусство асимптотики//Вестник Ленинградского. ун-та. 1977. №13.Вып. 3. С.5-12.*
20. *Пелех Б.Л. Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсальных изотропных пластин. Киев: Изд-во "Наукова думка".1977. 183с.*
21. *Перцев А.К., Платонов Э. Г. Динамика оболочек и пластин (нестационарные задачи). Ленинград: Изд-во "Судостроение". 1987. 316 с.*
22. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т.Теория оболочек переменной жесткости. Киев: Изд-во "Наукова думка". 1981. 544с.*

Сведения об авторе:
Саркисян Самвел Оганесович *-Чл-корр. НАН Армении, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. каф.мат. анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна. E-mail: slusin@yahoo.com*

Поступило в редакцию 30.05.2012